

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, E. EGERVÁRY, L. FEJÉR, CH. JORDÁN,
L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI, F. RIESZ,
B. SZ. NAGY, GY. SZ. NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS II.

FASCICULI 3—4.



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1951

ACTA MATHEMATICA HUNGARICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-U. 21

Az Acta Mathematica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg 20 ív terjedelemben.

A közlésre szánt kéziratok, lehetőleg géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként (egy évre) belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest, V., Alkotmány-utca 21. Bankszámla 04-878-111-48), külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankszámla 45-790-057-50-032 sz.) vagy külföldi képviselőinél és bizományosainál.

„Acta Mathematica” издает работы из области математических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

„Acta Mathematica” выходит в брошюрах переменного объема несколько выпусков объединяются в одном томе. (20 печатных листов.)

Ежегодно предвидено издание одного тома.

Предназначенные для публикации авторские рукописи следует направлять, по возможности машинописью, по следующему адресу:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направляется всякая корреспонденция для редакции и администрации.

Подписная цена „Acta Mathematica” — 110 форинтов за том. Заказы принимает Предприятие по внешней торговле книг и газет „Kultúra” (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Счет Банка No. 45-790-057-50-032) или его заграничные представительства и уполномоченные.

CONTRIBUTIONS TO THE REDUCTION THEORY OF THE DECISION PROBLEM

Fourth paper

Reduction to the case of a finite set of individuals

By

LÁSZLÓ KALMÁR (Szeged), corresponding member of the Academy

1. In view of CHURCH's theorem¹ stating the non-existence of a recursive² algorithm for the solution of the decision problem of the first order predicate calculus, the researches dealing with the decision problem are going through two lines. On the one hand, one is looking for particular cases of the general problem with a solution by a recursive algorithm; on the other hand, one tries to reduce the general problem (by recursive means) to some of its particular cases. A pair of results in both directions can be regarded in some respect as *final* if the particular case to which the general problem has been reduced is in that respect the *next more complicated one* to the particular case which has been solved by a recursive algorithm. E. g. the solution of the decision problem (in the satisfiability formulation) for first order formulae having a Skolem prefix with two universal quantifiers,³ i. e. of the form

$$(x_1)(x_2)(Ex_3)\dots(Ex_n)\mathbf{M},$$

where the matrix \mathbf{M} does not contain any quantifier, and GÖDEL's reduction

¹ A. CHURCH, A note to the Entscheidungsproblem, *The Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), pp. 40—41 and 101—102.

² *Recursive* (algorithm, function, dependence etc.) means throughout general recursive in the sense of HERBRAND—GÖDEL—KLEENE; see S. C. KLEENE, General recursive functions of natural numbers, *Math. Annalen*, 112 (1936), pp. 727—742.

³ See K. GÖDEL, Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik, *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, 2 (1932), pp. 27—28, and Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 40 (1933), pp. 433—443, especially pp. 433—441; L. KALMÁR, Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zähl ausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Math. Annalen*, 108 (1933), pp. 466—484; K. SCHÜTTE, Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, 109 (1934), pp. 572—603, and Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln, *Math. Annalen*, 110 (1935), pp. 161—194.

theorem⁴ stating the equivalence of the decision problem with the satisfiability question for first order formulae having a Skolem prefix with three universal quantifiers, i. e. of the form

$$(1) \quad (x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\dots(Ex_n)M,$$

form a final result as to the number of the universal quantifiers.⁵

One is inclined to regard the classical solution⁶ of the decision problem for sets of a given finite number of individuals, together with LÖWENHEIM'S theorem⁷ reducing the decision problem to the case of an enumerable set of individuals, as a final result, for there is no cardinal number between the finite integers and the cardinal number \aleph_0 of the enumerable sets. However, in this paper I shall sharpen LÖWENHEIM'S reduction theorem by using the concept of an *arbitrary* finite integer as intermediate between the concept of a *given* finite integer and \aleph_0 . Indeed, I shall show that the decision problem is equivalent to the question whether or not a finite set exists where a given first order formula can be satisfied. More explicitly, I shall prove the

THEOREM. *To any given first order formula **A** it is possible to construct another first order formula **B** such that **A** is satisfiable if and only if there is no finite set on which **B** can be satisfied.*

As a corollary of this theorem and the fact, to be seen from its proof, that **B** depends recursively on **A**, we shall obtain a theorem, proved formerly by TRACHTENBROT by another method,⁸ stating the non-existence of a recursive algorithm for deciding, which first order formulae are satisfiable in the finite,

⁴ K. GÖDEL, loc. cit. (*Monatshefte für Math. und Phys.*), especially pp. 441–443.

⁵ The finality of this result does not exclude a possibility of sharpening the reduction theorem (or of extending the solved particular case) in some other direction. E. g. in the reduction theorem, one can reach $n=1$, see J. SURÁNYI, A logikai függvénykalkulus eldöntés-problémájának redukciójáról, *Mat. és Fiz. Lapok*, **50** (1943), pp. 51–74, especially pp. 57–65 and Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper: Three universal, one existential quantifiers, *these Acta*, **1** (1950), pp. 261–271; or, alternatively, one can reduce the number of the predicate variables to a single binary one, see L. KALMÄR and J. SURÁNYI, On the reduction of the decision problem, second paper, Gödel prefix, a single binary predicate, *The Journal of Symbolic Logic*, **12** (1947), pp. 65–73.

⁶ See e. g. D. HILBERT und W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 3rd edition (Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1949), pp. 97–98.

⁷ L. LÖWENHEIM, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen*, **73** (1915), pp. 447–470, especially pp. 450–456. See also TH. SKOLEM, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, *Skrifter utgit av Videnskapselskapet i Kristiania*, Mat.-naturv. klasse, **1920**, no. 4, pp. 1–33, especially pp. 4–10, and Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo*, Mat.-naturv. Klasse, **1929**, no. 4, pp. 1–48, especially pp. 23–29.

⁸ Б. А. ТРАХТЕНБРОТ, Невозможность алгоритма для проблемы разрешимости на конечных классах, Доклады Академии Наук СССР, новая серия, **70** (1950), pp. 569–572.

i. e. on an appropriate finite set. Also some further corollaries, one of which has been formulated also by TRACHTENBROT in the quoted paper, will be inferred.

2. The main idea of the proof is as follows. According to a lemma due to SKOLEM and HERBRAND⁹, the *satisfiability* of **A** is equivalent to the *consistency* of a certain elementary axiom system \mathfrak{A} which we call *the axiom system associated with A*; elementary in the sense of being based on the proposition calculus only, i. e. of not containing any bound variable. Now, the *inconsistency* of an axiom system is a business taking place within a finite set, viz. the set formed of the formulae, together with their sub-terms and sub-formulae, of a proof leading to a contradiction. Hence, the inconsistency of \mathfrak{A} can be expressed as the *satisfiability* of a certain first order formula **B** on a finite set; thus, **A** can be satisfied at all if and only if **B** cannot be satisfied on any finite set.¹⁰

3. Now, let us proceed to the details of the proof. First, I have to give in full the axiom system \mathfrak{A} associated with a given first order formula **A**. For technical convenience, I confine myself to the case, where **A** has the form (1) with a matrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(F; x_1, \dots, x_n)$$

containing but a single, binary, predicate variable; by the result of a paper of SURÁNYI and myself,¹¹ I can do this without loss of generality.¹² Plainly we may suppose that x_1, \dots, x_n all occur in **M**. Also I suppose, **M** does not contain any truth function but \rightarrow and \neg ; i. e., it is formed from expressions

⁹ TH. SKOLEM, loc. cit.⁷ (*Vid.-Akademi i Oslo*), especially pp. 24–29; J. HERBRAND, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, Wydz. III, Nr. 33 (1930), pp. 1–128, especially pp. 112–117. See also D. HILBERT and P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 2 (Berlin, 1939), pp. 149–163.

¹⁰ By means of the Gödel completeness theorem (see K. GÖDEL, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 37 (1930), pp. 349–360) instead of the Skolem–Herbrand lemma, another proof of the theorem is possible. Indeed, by that theorem, the *satisfiability* of **A** is equivalent to the *non-existence of a proof of A* in the axiom system of the first order predicate calculus; and the *existence of a proof of A* in that axiom system can be expressed as the *satisfiability* of a certain first order formula **B'** on a finite set. However, I choose the way through the Skolem–Herbrand lemma for I prefer to deal with an *elementary* axiom system instead of that of the first order predicate calculus.

¹¹ Loc. cit.⁵.

¹² Alternatively, I could suppose, **A** has the form (1) with $n=4$ and a matrix of the form

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(F_1, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$$

(see J. SURÁNYI, loc. cit.⁵); this would give about the same degree of technical convenience. Of course, the proof would be possible without any restriction on **A**; however, the formulae would become much more complicated.

of the form $F(x_\mu, x_\nu)$ ($\mu, \nu = 1, \dots, n$) by means of a finite number of applications of the operations yielding $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ from \mathbf{G} and \mathbf{H} , or $\bar{\mathbf{G}}$ from \mathbf{G} .

Now the primitive frame of \mathfrak{A} is as follows:

Symbols of \mathfrak{A} are: $a; f_4, \dots, f_n; F; \rightarrow, \neg; ($ (left parenthesis), $)$ (right parenthesis), $,$ (comma).¹³

Terms of \mathfrak{A} are formed according to the rules: (i) a is a term of \mathfrak{A} ; (ii) if t_1, t_2, t_3 are terms of \mathfrak{A} , $f_4(t_1, t_2, t_3), \dots, f_n(t_1, t_2, t_3)$ are also terms of \mathfrak{A} ; (iii) nothing else is a term of \mathfrak{A} .¹⁴

Formulae of \mathfrak{A} are formed according to the rules: (i) if t_1, t_2 are terms of \mathfrak{A} , $F(t_1, t_2)$ is a formula of \mathfrak{A} ; (ii) if \mathbf{G} and \mathbf{H} are formulae of \mathfrak{A} , $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ is also a formula of \mathfrak{A} ; (iii) if \mathbf{G} is a formula of \mathfrak{A} , $\bar{\mathbf{G}}$ is also a formula of \mathfrak{A} ; (iv) nothing else is a formula of \mathfrak{A} .

Axioms of \mathfrak{A} are particular formulae of \mathfrak{A} formed according to the rules:

- (i) if $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}$ are formulae of \mathfrak{A} , then the formulae of \mathfrak{A}
- $$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{H} \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})), \\ ((\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K})) \rightarrow ((\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K}))) \\ ((\bar{\mathbf{H}} \rightarrow \bar{\mathbf{G}}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})) \end{array} \right.$$

are axioms of \mathfrak{A} (called *axioms of the propositional calculus*); (ii) if t_1, t_2, t_3 are terms of \mathfrak{A} , then the formula of \mathfrak{A} ¹⁵

$$\mathbf{M}(F; t_1, t_2, t_3, f_4(t_1, t_2, t_3), \dots, f_n(t_1, t_2, t_3))$$

is an axiom of \mathfrak{A} (called a *proper axiom*); (iii) nothing else is an axiom of \mathfrak{A} .

The only *rule of inference* of \mathfrak{A} is the *modus ponens*, yielding the formula \mathbf{H} out of the formulae \mathbf{G} and $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$; i. e. *theorems* of \mathfrak{A} (which are particular formulae of \mathfrak{A}) are formed according to the rules: (i) if \mathbf{G} is an axiom of \mathfrak{A} , then \mathbf{G} is a theorem of \mathfrak{A} ; (ii) if \mathbf{G} and $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ are theorems of \mathfrak{A} , then the formula \mathbf{H} is a theorem of \mathfrak{A} ; (iii) nothing else is a theorem of \mathfrak{A} .¹⁶

4. We can now formulate the Skolem-Herbrand lemma for first order formulae \mathbf{A} of the particular form under consideration as follows.

¹³ By using the familiar Łukasiewicz notation system (see e. g. J. ŁUKASIEWICZ und A. TARSKI, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, Wydz. III., 23 (1930), pp. 30–50), we could spare the three last symbols.

¹⁴ I. e., the set of the terms of \mathfrak{A} is the smallest set (that is, the intersection of all sets) having a , and, together with t_1, t_2 and t_3 , also $f_1(t_1, t_2, t_3), \dots, f_n(t_1, t_2, t_3)$ as elements. Hence, we can prove a theorem for arbitrary terms of \mathfrak{A} by proving it for a , and, supposing it to hold for t_1, t_2 and t_3 , by proving it for $f_1(t_1, t_2, t_3), \dots, f_n(t_1, t_2, t_3)$ too. A similar remark holds for the formulae of \mathfrak{A} as well as for the theorems of \mathfrak{A} too.

¹⁵ By the hypothesis concerning the form of the matrix \mathbf{M} , this is a formula of \mathfrak{A} indeed.

¹⁶ As easily seen, \mathbf{G} is a theorem of \mathfrak{A} if and only if it is a member of a finite sequence $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_m$ such that every \mathbf{G}_μ is either an axiom of \mathfrak{A} , or there are integers, $\mu', \mu'' < \mu$ such that $\mathbf{G}_{\mu'} = (\mathbf{G}_{\mu''} \rightarrow \mathbf{G}_\mu)$.

The first order formula **A** is satisfiable if and only if the associated axiom system \mathfrak{A} is consistent, i. e. if there is no theorem **G** of \mathfrak{A} such that also $\bar{\mathbf{G}}$ is a theorem of \mathfrak{A} .

For convenience of the reader, I prove this lemma without supposing acquaintance with the papers of SKOLEM and HERBRAND.¹⁷ First, suppose, **A** is satisfiable. Then, there is a (non-empty) set *I* as well as a predicate Φ and $n-3$ descriptive functions $\varphi_4, \dots, \varphi_n$ such that we have¹⁸

$$(3) \quad M(\Phi; x_1, x_2, x_3, \varphi_4(x_1, x_2, x_3), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, x_3)) = \uparrow$$

for arbitrary $x_1, x_2, x_3 \in I$. Let *b* be a fixed element of *I*. We attach to each term of \mathfrak{A} an element of *I* as follows: (i) to *a* we attach *b*; (ii) supposing, to $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ the elements c_1, c_2, c_3 of *I* have been attached, respectively, we attach $\varphi_v(c_1, c_2, c_3)$ to $f_v(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ for $v=4, \dots, n$. Further, we attach to each formula of \mathfrak{A} one of the logical values \uparrow and \downarrow as follows: (i) if to \mathbf{t}_1 and \mathbf{t}_2 the elements c_1 and c_2 of *I* have been attached, respectively, then we attach the logical value of $\Phi(c_1, c_2)$ to $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$; (ii) to $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ we attach \downarrow if \uparrow has been attached to *G* and \downarrow to *H*, otherwise we attach \uparrow to $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$; (iii) we attach \downarrow or \uparrow to $\bar{\mathbf{G}}$ according as \uparrow or \downarrow has been attached to *G*.

We see at once that to an axiom of \mathfrak{A} always \uparrow has been attached. For an axiom of the propositional calculus, this follows from the fact that (2), considered as truth-functions of **G**, **H** and **K**, are identically true, and for a proper axiom, from (3). Also, if \uparrow has been attached to the formulae **G** and $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ of \mathfrak{A} , the same holds for **H** too. Hence we see by induction that \uparrow has been attached to every theorem **G** of \mathfrak{A} , thus \downarrow has been attached to $\bar{\mathbf{G}}$; therefore, $\bar{\mathbf{G}}$ cannot be a theorem of \mathfrak{A} , i. e., \mathfrak{A} is consistent.

Secondly, suppose \mathfrak{A} to be consistent. Consider an enumeration

$$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \dots$$

of the proper axioms. Let T_m be the set of the terms figuring in one of $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ (as $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$, or as $f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$) and T_ω the set of all terms of \mathfrak{A} . Plainly $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_m \subseteq \dots \subseteq T_\omega$, and $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ can be considered as truth-functions of the variables $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ with $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_m$.

Using $(\mathbf{G} \& \mathbf{H})$ as an abbreviation for $(\mathbf{G} \rightarrow \bar{\mathbf{H}})$ and $(\mathbf{G}_1 \& \mathbf{G}_2 \& \dots \& \mathbf{G}_m)$ for $(\dots(\mathbf{G}_1 \& \mathbf{G}_2) \& \dots \& \mathbf{G}_m)$, we assert that $(\mathbf{A}_1 \& \dots \& \mathbf{A}_m)$ is a theorem of \mathfrak{A} . Indeed, owing to the completeness of (2), considered as an axiom system

¹⁷ In SKOLEM, the proof of the lemma (besides omitting its easier part) is imbedded into the proof without use of the axiom of choice which has been given by SKOLEM for the Löwenheim theorem (loc. cit. 7). In HERBRAND, the proof has been made difficult by the "proof-theoretic" standpoint, whereas in this paper, the "set-theoretic" standpoint has been accepted. However, the theorem of this paper can be proved on the basis of the "proof-theoretic" standpoint too; in this case, HERBRAND's proof of the lemma has to be adopted.

¹⁸ I use the symbols \uparrow and \downarrow for the truth-values "true" and "false", respectively.

for the propositional calculus,¹⁹

$$(\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{H} \rightarrow (\overline{\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}})))$$

is a theorem of \mathfrak{A} for arbitrary formulae \mathbf{G} and \mathbf{H} of \mathfrak{A} , for, considered as a truth-function, it is identically true. Therefore, by two applications of the *modus ponens*, we see that for theorems \mathbf{G} and \mathbf{H} of \mathfrak{A} , $(\mathbf{G} \& \mathbf{H})$, i. e. $(\mathbf{G} \rightarrow \overline{\mathbf{H}})$, is likewise a theorem of \mathfrak{A} . An iterated application of this fact shows that $(\mathbf{A}_1 \& \dots \& \mathbf{A}_m)$ is indeed a theorem of \mathfrak{A} , hence, considered as a truth-function of the variables $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ with $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_m$, it cannot be identically \downarrow , for in the opposite case $(\overline{\mathbf{A}_1 \& \dots \& \mathbf{A}_m})$ would be identically \uparrow , thus also a theorem of \mathfrak{A} and \mathfrak{A} would be inconsistent. In other words, there is a binary predicate Φ defined on T_m such that $(\mathbf{A}_1 \& \dots \& \mathbf{A}_m)$ becomes \uparrow when F is replaced by Φ ; hence, the same holds for $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ too.

Let us attach to each such predicate Φ a vertex $P_{m,r}$ of a graph²⁰ ($r = 1, \dots, s_m$, where s_m is the number of such predicates Φ ; s_m is obviously finite for there is only a finite number of binary predicates defined on the finite set T_m). Join the vertices $P_{m,r}$ and $P_{m',r'}$ by an edge of the graph if and only if $|m' - m| = 1$ and the predicates Φ and Φ' corresponding to $P_{m,r}$ and $P_{m',r'}$ coincide within $T_{\min(m, m')}$. Obviously, every vertex $P_{m+1, r}$ ($m = 1, 2, \dots; r = \overline{1}, \dots, s_{m+1}$) has been joined with one vertex $P_{m, r'}$ ($r' = 1, \dots, s_m$) at least. Hence, our graph satisfies the condition of D. KÖNIG's infinity lemma²¹; therefore, there is an infinite path $P_{1, r_1} P_{2, r_2} \dots$ within this graph, i. e. an infinite sequence $P_{1, r_1}, P_{2, r_2}, \dots$ of its vertices such that P_{m, r_m} is joined with $P_{m+1, r_{m+1}}$ by an edge of the graph. Denoting by Φ_m the binary predicate defined on T_m , belonging to P_{m, r_m} , Φ_{m+1} coincides with Φ_m within T_m ; hence, for $m' > m$, $\Phi_{m'}$ coincides with Φ_m within T_m . Now, define the binary predicate Φ_ω throughout T_ω by $\Phi_\omega(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \Phi_m(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ for arbitrary terms $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ of \mathfrak{A} , m denoting the smallest integer for which $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_m$. We have then $\Phi_\omega(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \Phi_m(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ for any $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_m$. Let $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ be arbitrary terms of \mathfrak{A} ; then $M(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3))$ is a proper axiom, \mathbf{A}_m , say. Then we have obviously $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \in T_m$ and hence

¹⁹ See e. g. L. KALMÁR, Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, *Acta Scientiarum Math.*, 7 (1935), pp. 222–243, especially pp. 239–243. The axiom system (2) of the propositional calculus is essentially due to FREGE.

²⁰ As to the idea of a graph and related notions, see e. g. D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936), pp. 1–2. The graph terminology has been shown by KÖNIG very useful in several branches of mathematics, especially in set theory and logic.

²¹ D. KÖNIG, Sur les correspondances multivoques des ensembles, *Fundamenta Math.*, 8 (1926), pp. 114–134, especially pp. 120–124; Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche, *Acta Scientiarum Math.*, 3 (1927), pp. 121–130, especially § 1, and loc. cit. ²⁰, pp. 81–82.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\Phi_\omega; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)) = \\ = \mathbf{M}(\Phi_m; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)) = \uparrow, \end{aligned}$$

i. e. the predicate Φ_ω satisfies **A** on T_ω , thus **A** is satisfiable.

5. Now, I shall construct a first order formula **B** which is satisfiable on a finite set if and only if the axiom system \mathfrak{A} is inconsistent. Suppose first that \mathfrak{A} is inconsistent. Then there is a finite sequence $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_m$ of *different* formulae of \mathfrak{A} such that, for $\mu = 1, \dots, m$, \mathbf{G}_μ is either an axiom of \mathfrak{A} , or there are positive integers $\mu', \mu'' < \mu$ such that $\mathbf{G}_{\mu''} = (\mathbf{G}_{\mu'} \rightarrow \mathbf{G}_\mu)$; finally, there are positive integers $\mu, \mu' \leq m$ such that $\mathbf{G}_{\mu'} = \mathbf{G}_\mu$.²²

Let J denote the (finite) set formed of the formulae $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_m$, together with their sub-formulae and sub-terms.²³ Define the predicates $\Psi_1, \dots, \Psi_n, \Omega, \Gamma, \Lambda, \Sigma, \Theta$ and Ξ on J as follows:

$\Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, y) = \uparrow$ if and only if x_1, x_2, x_3 are terms and y is the term $f_\nu(x_1, x_2, x_3)$ ($\nu = 4, \dots, n$);

$\Omega(x_1, x_2, y) = \uparrow$ if and only if x_1 and x_2 are terms and y is the formula $F(x_1, x_2)$;

$\Gamma(x_1, x_2, y) = \uparrow$ if and only if x_1 and x_2 are formulae and y is the formula $(x_1 \rightarrow x_2)$;

$\Lambda(x, y) = \uparrow$ if and only if x is a formula and y is the formula \bar{x} ;

$\Sigma(x, y) = \uparrow$ if and only if x is a sub-term or a sub-formula of y ;

$\Theta(x) = \uparrow$ if and only if x is one of the formulae $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_m$;

$\Xi(x, y) = \uparrow$ if and only if x is a formula \mathbf{G}_μ , y is a formula $\mathbf{G}_{\mu'}$ and $\mu < \mu'$. Then the following propositions²⁴ have the truth-value \uparrow for $\nu = 4, \dots, n$ and for arbitrary values of the free variables.

$$(4) \quad \Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, y) \rightarrow \Sigma(x_1, y) \Sigma(x_2, y) \Sigma(x_3, y).$$

²² Indeed, apply the remark of footnote 16 to the formulae \mathbf{G} and $\bar{\mathbf{G}}$ which are both theorems of \mathfrak{A} , juxtapose the sequences obtained thus and cancel each formula which is identical with a preceding one.

²³ Sub-term and sub-formula (more exactly, proper sub-term and proper sub-formula) is defined as follows. (i) a has no sub-term; (ii) if $\mathbf{t} = f_\nu(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ ($\nu = 4, \dots, n$), then the sub-terms of \mathbf{t} are $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ as well as their sub-terms; (iii) nothing else is a sub-term of a term and a term has no sub-formula; (iv) if $\mathbf{G} = F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$, then the sub-terms of \mathbf{G} are $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ as well as their sub-terms, and \mathbf{G} has no sub-formula; (v) if $\mathbf{K} = (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$, then the sub-terms of \mathbf{K} are those of \mathbf{G} and \mathbf{H} , the sub-formulae of \mathbf{K} are \mathbf{G}, \mathbf{H} as well as their sub-formulae; (vi) if $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{G}}$, then the sub-terms of \mathbf{H} are those of \mathbf{G} , the sub-formulae of \mathbf{H} are \mathbf{G} as well as its sub-formulae; (vii) nothing else is a sub-term or a sub-formula of a formula.

²⁴ In writing down we use the usual abbreviations of propositional calculus (omission of parentheses, omission of the conjunction sign or replacement of it by a dot, abbreviation of a conjunction of analogous terms by a product sign etc). There is no danger of misunderstanding through using the same symbols \neg and \rightarrow for negation and implication as in the axiom system \mathfrak{A} . Also, we use the symbol $(x = y)$ for the proposition which has the truth-value \uparrow if and only if x and y are the same elements.

Indeed, if $y = f_v(x_1, x_2, x_3)$, then x_1 , x_2 and x_3 are sub-terms of y .

$$(5) \quad \Omega(x_1, x_2, y) \rightarrow \Sigma(x_1, y) \Sigma(x_2, y).$$

Indeed, if $y = F(x_1, x_2)$, then x_1 and x_2 are sub-terms of y .

$$(6) \quad \Gamma(x_1, x_2, y) \rightarrow \Sigma(x_1, y) \Sigma(x_2, y).$$

Indeed, if $y = (x_1 \rightarrow x_2)$, then x_1 and x_2 are sub-formulae of y .

$$(7) \quad \Lambda(x, y) \rightarrow \Sigma(x, y).$$

Indeed, if $y = \bar{x}$, then x is a sub-formula of y .

$$(8) \quad \bar{\Sigma}(x, x).$$

Indeed, no element x of J can be a (proper) sub-term or sub-formula of itself.

$$(9) \quad \Sigma(x, y) \Sigma(y, z) \rightarrow \Sigma(x, z).$$

Indeed, if x is a sub-term or a sub-formula of y and y is a sub-term or a sub-formula of z , then x is a sub-term or a sub-formula of z .

$$(10) \quad \Psi_r(x_1, x_2, x_3, z) \Psi_r(y_1, y_2, y_3, z) \rightarrow (x_1 = y_1) (x_2 = y_2) (x_3 = y_3).$$

Indeed, if $z = f_r(x_1, x_2, x_3) = f_r(y_1, y_2, y_3)$, then we have $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ and $x_3 = y_3$.

$$(11) \quad \Omega(x_1, x_2, z) \Omega(y_1, y_2, z) \rightarrow (x_1 = y_1) (x_2 = y_2).$$

Indeed, if $z = F(x_1, x_2) = F(y_1, y_2)$, then we have $x_1 = y_1$ and $x_2 = y_2$.

$$(12) \quad \Gamma(x_1, x_2, z) \Gamma(y_1, y_2, z) \rightarrow (x_1 = y_1) (x_2 = y_2).$$

Indeed, if $z = (x_1 \rightarrow x_2) = (y_1 \rightarrow y_2)$, then we have $x_1 = y_1$ and $x_2 = y_2$.

$$(13) \quad \Lambda(x, z) \Lambda(y, z) \rightarrow (x = y)$$

Indeed, if $z = \bar{x} = \bar{y}$, then we have $x = y$.

$$(14) \quad \Psi_r(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow$$

$$\rightarrow \prod_{\substack{r'=4 \\ r'+r}}^n \bar{\Psi}_{r'}(y_1, y_2, y_3, x_4) \prod_{\mu=1}^4 (\bar{\Omega}(y_1, y_2, x_\mu) \bar{\Gamma}(y_1, y_2, x_\mu) \bar{\Lambda}(y, x_\mu)).$$

Indeed, if $x_4 = f_r(x_1, x_2, x_3)$, then x_4 cannot be of the form $f_{r'}(y_1, y_2, y_3)$ with $r' \neq r$; further, x_1, x_2, x_3 and x_4 being terms, they cannot be of any of the forms $F(y_1, y_2)$, $(y_1 \rightarrow y_2)$, or \bar{y} .

$$(15) \quad \Omega(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \prod_{\mu=1}^2 \bar{\Omega}(y_1, y_2, x_\mu) \prod_{\mu=1}^3 (\bar{\Gamma}(y_1, y_2, x_\mu) \bar{\Lambda}(y, x_\mu)).$$

Indeed, if $x_3 = F(x_1, x_2)$, then x_1 and x_2 , being terms, cannot be of any of the forms $F(y_1, y_2)$, $(y \rightarrow y_2)$, or \bar{y} ; also, x_3 cannot be of either of the forms $(y_1 \rightarrow y_2)$, or \bar{y} .

$$(16) \quad \Gamma(x_1, x_2, z) \rightarrow \prod_{\mu=1}^2 ((E y_1) (E y_2) \Omega(y_1, y_2, x_\mu) \vee \\ \vee (E y_1) (E y_2) \Gamma(y_1, y_2, x_\mu) \vee (E y) \Lambda(y, x_\mu) \bar{\Lambda}(x, z)).$$

Indeed, if $z = (x_1 \rightarrow x_2)$, then x_1 and x_2 , being formulae, are of one of the forms $F(y_1, y_2)$, $(y \rightarrow y_2)$, or y , where y_1, y_2 , or y , as sub-terms or sub-formulae of x_1 or x_2 , respectively, belong to J together with x_1 and x_2 ; further, z cannot be of the form x .

$$(17) \quad \Lambda(x, z) \rightarrow ((E y_1)(E y_2) \Omega(y_1, y_2, x) \vee (E y_1)(E y_2) I'(y_1, y_2, x) \vee (E y) \Lambda(y, x)).$$

Indeed, if $z = x$, then x , as a formula, is of one of the forms $F(y_1, y_2)$, $(y_1 \rightarrow y_2)$, or y , where y_1 and y_2 , or y , being sub-terms, or a sub-formula, of x , respectively, belong to J together with x .

$$(18) \quad \Theta(x) \Theta(y) \rightarrow ((x = y) \vee \Xi(x, y) \vee \Xi(y, x)).$$

Indeed, if $x = G_\mu$ and $y = G_{\mu'}$ ($\mu, \mu' = 1, \dots, m$), then we have either $\mu = \mu'$, or $\mu < \mu'$, or $\mu' < \mu$.

$$(19) \quad \Xi(x, x).$$

Indeed, $x = G_\mu = G_{\mu'}$ ($\mu, \mu' = 1, \dots, m$) with $\mu \neq \mu'$ is impossible, for G_1, \dots, G_m are different.

$$(20) \quad \Xi(x, y) \Xi(y, z) \rightarrow \Xi(x, z).$$

Indeed, if $x = G_\mu$, $y = G_{\mu'}$, $z = G_{\mu''}$ ($\mu, \mu', \mu'' = 1, \dots, m$) and $\mu \neq \mu' \neq \mu''$, then we have $\mu < \mu''$.

$$(21) \quad (Ex)(Ey)(\Theta(x) \Theta(y) \Lambda(x, y)).$$

Indeed, there are $\mu, \mu' (= 1, \dots, m)$ such that $G_\mu = \bar{G}_\mu$; for $x = G_\mu, y = G_{\mu'}$ (which belong to J) we have $\Theta(x) = \Theta(y) = \Lambda(x, y) = \uparrow$.

We need one more proposition depending on the structure of \mathbf{M} . To specify this structure, we remark that, according to the suppositions made on \mathbf{M} , there is a sequence

$$\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_r$$

of matrices $\mathbf{M}_\varrho = \mathbf{M}_\varrho(F; x_1, \dots, x_n)$ formed of $F(x_1, x_1), F(x_1, x_2), \dots, F(x_n, x_n)$ by means of a finite number of implications and negations, such that every \mathbf{M}_ϱ is (i) either one of $F(x_\mu, x_\nu)$, $\mu, \nu = 1, \dots, n$; (ii) or an implication $(\mathbf{M}_{\varrho'} \rightarrow \mathbf{M}_{\varrho''})$ with $\varrho', \varrho'' < \varrho$; (iii) or a negation $\bar{\mathbf{M}}_{\varrho'}$ with $\varrho' < \varrho$; finally (iv) \mathbf{M} is identical with \mathbf{M}_r . Let $\varrho_{11}, \dots, \varrho_{1j}$ denote the values of ϱ for which (i) holds; $\varrho_{21}, \dots, \varrho_{2j}$ those, for which (ii) holds; and $\varrho_{31}, \dots, \varrho_{3k}$ those, for which (iii) holds ($i + j + k = r$). Moreover, let

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\varrho_{1x}} &= F(x_{\mu_x}, x_{\nu_x}) \text{ for } x = 1, \dots, i \\ &\quad (\mu_x, \nu_x = 1, \dots, n); \\ \mathbf{M}_{\varrho_{2x}} &= (\mathbf{M}_{\varrho_{4x}} \rightarrow \mathbf{M}_{\varrho_{5x}}) \text{ for } x = 1, \dots, j \\ &\quad (\varrho_{4x}, \varrho_{5x} = 1, \dots, \varrho_{2x} - 1); \\ \mathbf{M}_{\varrho_{3x}} &= \bar{\mathbf{M}}_{\varrho_{6x}} \text{ for } x = 1, \dots, k \\ &\quad (\varrho_{6x} = 1, \dots, \varrho_{3x} - 1). \end{aligned}$$

Now, the following proposition also has the truth-value \uparrow :

$$(22) \quad \Theta(x) \rightarrow \left((Ep_1)(Ep_2)(Ep_{12}) (\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) \Gamma(p_2, p_{12}, x)) \vee \right. \\
\vee (Ep_1)(Ep_2)(Ep_3)(Ep_{12})(Ep_{13})(Ep_{23})(Ep_{123}) (\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) \cdot \\
\cdot \Gamma(p_1, p_3, p_{13}) \Gamma(p_2, p_3, p_{23}) \Gamma(p_1, p_{23}, p_{123}) \Gamma(p_{12}, p_{13}, p_{123})) \cdot \\
\cdot \Gamma(p_{123}, p_{123}, x)) \vee (Ep_1)(Ep_2)(Ep_{12})(Ep'_1)(Ep'_2)(Ep'_{21}) (\Gamma(p_1, p_2, p_{12}) \cdot \\
\cdot \Lambda(p_1, p'_1) \Lambda(p_2, p'_2) \Gamma(p'_2, p'_1, p'_{21}) \Gamma(p'_{21}, p_{12}, x)) \vee \\
\vee (Ey_1) \dots (Ey_n) (Ez_1) \dots (Ez_r) \left(\prod_{r=4}^n \Psi_r(y_1, y_2, y_3, y_r) \prod_{x=1}^i \Omega(y_{\mu_x}, y_{\nu_x}, z_{\varrho_1 x}) \cdot \right. \\
\cdot \prod_{x=1}^j \Gamma(z_{\varrho_4 x}, z_{\varrho_5 x}, z_{\varrho_2 x}) \cdot \prod_{x=1}^k \Lambda(z_{\varrho_6 x}, z_{\varrho_3 x}) (x = z_r) \Big) \vee \\
\left. \vee (Ey) (Ez) (\epsilon(y) \Theta(z) \Xi(y, x) \Xi(z, x) \Gamma(y, x, z)) \right).$$

Indeed, if $x = \mathbf{G}_\mu$ ($\mu = 1, \dots, m$), then x is (i) either an axiom of the proposition calculus of the form $(\mathbf{H} \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}))$, or (ii) an axiom of the proposition calculus of the form $((\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K})) \rightarrow ((\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K})))$, (iii) or an axiom of the proposition calculus of the form $((\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}))$, (iv) or a proper axiom of the form

$$\mathbf{M}(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)),$$

(v) or else there are positive integers $\mu', \mu'' < \mu$ such that $\mathbf{G}_{\mu''} = (\mathbf{G}_{\mu'} \rightarrow \mathbf{G}_{\mu'})$. In case (i), $p_1 = \mathbf{G}$, $p_2 = \mathbf{H}$, and $p_{12} = (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ are sub-formulae of $x = \mathbf{G}_\mu$, thus elements of J ; and we have $p_{12} = (p_1 \rightarrow p_2)$ and $x = (p_2 \rightarrow p_{12})$. In case (ii), $p_1 = \mathbf{G}$, $p_2 = \mathbf{H}$, $p_3 = \mathbf{K}$, $p_{12} = (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$, $p_{13} = (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K})$, $p_{123} = (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K})$, $p_{123} = ((\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K})) \rightarrow ((\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K})))$ and $p_{123} = ((\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K}))$ are sub-formulae of $x = \mathbf{G}_\mu$, thus elements of J ; and we have $p_{12} = (p_1 \rightarrow p_2)$, $p_{13} = (p_1 \rightarrow p_3)$, $p_{23} = (p_2 \rightarrow p_3)$, $p_{123} = (p_1 \rightarrow p_{23})$, $p_{1213} = (p_{12} \rightarrow p_{13})$, and $x = (p_{123} \rightarrow p_{1213})$. In case (iii), $p_1 = \mathbf{G}$, $p_2 = \mathbf{H}$, $p_{12} = (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$, $p'_1 = \mathbf{G}$, $p'_2 = \mathbf{H}$, $p'_{21} = (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G})$ are sub-formulae of $x = \mathbf{G}_\mu$, thus elements of J ; and we have $p_{12} = (p_1 \rightarrow p_2)$, $p'_1 = p_1$, $p'_2 = p_2$, $p'_{21} = (p_2 \rightarrow p_1)$, and $x = (p'_{21} \rightarrow p_{12})$. In case (iv), $y_1 = \mathbf{t}_1$, $y_2 = \mathbf{t}_2$, $y_3 = \mathbf{t}_3$, $y_4 = f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$, \dots , $y_n = f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ are sub-terms of $x = \mathbf{G}_\mu$ (for x_1, \dots, x_n all occur in $\mathbf{M}(F; x_1, \dots, x_n)$), $z_\varrho = \mathbf{M}_\varrho(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3))$ ($\varrho = 1, \dots, r$) are sub-formulae of $z_r = \mathbf{M}(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)) = x = \mathbf{G}_\mu$, thus $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_r$ belong to J ; and we have $y_r = f_r(y_1, y_2, y_3)$ ($r = 4, \dots, n$); $z_{\varrho_1 x} = F(y_{\mu_x}, y_{\nu_x})$ ($x = 1, \dots, i$); $z_{\varrho_2 x} = (z_{\varrho_1 x} \rightarrow z_{\varrho_3 x})$ ($x = 1, \dots, j$); $z_{\varrho_3 x} = z_{\varrho_6 x}$ ($x = 1, \dots, k$); and $x = z_r$. In case (v), $y = \mathbf{G}_{\mu'}$, $z = \mathbf{G}_{\mu''}$ belong to J ; we have $\mu' < \mu$, $\mu'' < \mu$ and $z = (y \rightarrow x)$.

Now, form the conjunction of (4)–(22) (in (4), (10), and (14), for $r = 4, \dots, n$), bind the free variables by means of general quantifiers, and replace the predicates $\Psi_1, \dots, \Psi_n, \Omega, \Gamma, \Lambda, \Sigma, \Theta$, and Ξ by different predicates

variables. We thus obtain a first order formula (containing the identity symbol) which we denote by **B**. By what has been proved, **B** is satisfiable on the finite set J if \mathfrak{A} is inconsistent, i. e. if **A** is not satisfiable on any set.

6. We have still to prove that conversely, if **B** can be satisfied on a finite set then \mathfrak{A} is inconsistent, i. e. **A** cannot be satisfied on any set.

Suppose **B** is satisfied on a (non-empty) finite set J' by an appropriate choice of the predicates $\psi_1, \dots, \psi_n, \Omega, I', \Lambda, \Sigma, \Theta$, and Ξ , defined on J' and to be substituted for the predicate variables of **B**. Then, (4)—(22) hold for arbitrary elements of J' , J' being the range of the existential quantifiers.

We define some sub-sets of J' as well as some descriptive functions defined on these sub-sets. Let J'_{ψ_r} be the set of all $z \in J'$ for which $\psi_r(x_1, x_2, x_3, z)$ is true for some $x_1, x_2, x_3 \in J'$ ($r = 4, \dots, n$). Owing to (10), these x_1, x_2 and x_3 are uniquely determined by z ; let $x_1 = \psi_1(z)$, $x_2 = \psi_2(z)$, $x_3 = \psi_3(z)$. It is not necessary to mark r in the notation, since on account of (14), $\psi_r(x_1, x_2, x_3, z)$ and $\psi_{r'}(y_1, y_2, y_3, z)$ cannot be both true for $r' \neq r$. Thus, no two of $J'_{\psi_4}, \dots, J'_{\psi_n}$ have any elements in common and the descriptive functions ψ_1, ψ_2, ψ_3 are defined on $J'_{\psi_r} = J'_{\psi_4} + \dots + J'_{\psi_n}$. By (4), we have $\Sigma(\psi_\mu(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_{\psi_r}$ and $\mu = 1, 2, 3$.

Similarly, let J'_Ω be the set of all $z \in J'$ for which $\Omega(x_1, x_2, z)$ is true for some $x_1, x_2 \in J'$. Because of (11), these x_1 and x_2 are uniquely determined by z ; let $x_1 = \omega_1(z)$, $x_2 = \omega_2(z)$ (ω_1, ω_2 are defined on J'_Ω). By (5), we have $\Sigma(\omega_\mu(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_\Omega$ and $\mu = 1, 2$.

Let J'_Γ be the set of all $z \in J'$ for which $I'(x_1, x_2, z)$ is true for some $x_1, x_2 \in J'$. Because of (12), these x_1 and x_2 are uniquely determined by z ; let $x_1 = \gamma_1(z)$, $x_2 = \gamma_2(z)$ (γ_1, γ_2 defined on J'_Γ). By (6), we have $\Sigma(\gamma_\mu(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_\Gamma$ and $\mu = 1, 2$.

Finally, let J'_Λ be the set of all $z \in J'$ for which $\Lambda(x, z)$ is true for some $x \in J'$. Because of (13), this x is uniquely determined by z ; let $x = \lambda(z)$ (λ defined on J'_Λ). By (7), we have $\Sigma(\lambda(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_\Lambda$.

In consequence of (14), (15) and (16), no two of $J'_{\psi_r}, J'_\Omega, J'_\Gamma$ and J'_Λ have an element in common. Let $J'_\Phi = J'_\Omega + J'_\Gamma + J'_\Lambda, J'_T = J' - J'_\Phi$ (the subscripts Φ and T have to remind to "formula" and "term", respectively). Owing to (14), (15), (16) and (17), we have $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z) \in J'_T$ for $z \in J'_{\psi_r}$, $\omega_1(z), \omega_2(z) \in J'_T$ for $z \in J'_\Omega$, $\gamma_1(z), \gamma_2(z) \in J'_\Phi$ for $z \in J'_\Gamma$ and $\lambda(z) \in J'_\Phi$ for $z \in J'_\Lambda$.

(21) shows that J'_Λ and hence, J'_Φ is not empty. To prove the same for J'_T too, we need the following lemma of which we shall make use several times in the sequel.

There is no non-empty subset J'' of J' throughout which a descriptive function $\delta(z)$ can be defined such that for $z \in J''$ we have $\delta(z) \in J''$ and $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$.

Indeed, if such a J'' and $\delta(z)$ would exist, let $u_1 \in J''$, and define $u_{l+1} = \delta(u_l)$ for $l = 1, 2, \dots$. Then we have $u_l \in J''$ and $\Sigma(u_{l+1}, u_l) = \uparrow$ for $l = 1, 2, \dots$

Hence, by (9), we have $\Sigma(u_p, u_q) = \uparrow$ for $p, q = 1, 2, \dots, p < q$. Thus, by (8), $u_p \vdash u_q$ for $p, q = 1, 2, \dots, p \vdash q$; i. e., u_1, u_2, \dots are different, in contradiction to the finiteness of J' .

Our lemma shows that J'_Ω is not empty. Indeed, in the opposite case we should have $J'_\Phi = J'_\Gamma + J'_A$; hence, defining

$$\delta(z) = \begin{cases} \gamma_1(z) & \text{for } z \in J'_\Gamma, \\ \lambda(z) & \text{for } z \in J'_A, \end{cases}$$

$\delta(z)$ would be defined throughout J'_Φ and we should have $\delta(z) \in J'_\Phi$, $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_\Phi$, which is impossible according to the lemma.

Hence, neither J'_T is empty; indeed, for any $z \in J'_\Omega$ we have $\omega_1(z) \in J'_T$.

By the definition of J'_T (as a matter of fact, by (14)), we have $J'_\Psi \subseteq J'_T$. Moreover, we have $J'_\Psi \subset J'_T$, i. e. J'_Ψ is a proper subset of J'_T . For in the opposite case $J'_\Psi = J'_T$, $\delta(z) = \psi_1(z)$ would be defined throughout J'_T and we should have $\delta(z) \in J'_T$ as well as $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$ for $z \in J'_T$ in contradiction to the lemma.

Now, we attach a term of \mathfrak{A} to some elements of J'_T and a formula of \mathfrak{A} to some elements of J'_Φ according to the following rules. (i) If $z \in J'_T - J'_\Psi$, let the term a be attached to z . (ii) If $z \in J'_{\Psi_\nu}$ ($\nu = 4, \dots, n$) and, for $\mu = 1, 2, 3$, the term \mathbf{t}_μ has been attached to $\psi_\mu(z)$, then we attach the term $f_\nu(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ to z . (iii) If $z \in J'_\Omega$ and, for $\mu = 1, 2$, the term \mathbf{t}_μ has been attached to $\omega_\mu(z)$, then we attach the formula $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ to z . (iv) If $z \in J'_\Gamma$ and, for $\mu = 1, 2$, the formula \mathbf{H}_μ has been attached to $\gamma_\mu(z)$, then we attach the formula $(\mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2)$ to z . (v) If $z \in J'_A$ and the formula \mathbf{H} has been attached to $\lambda(z)$, then we attach the formula $\bar{\mathbf{H}}$ to z .

We assert that in this way, to *each* element of J'_T a term of \mathfrak{A} and to each element of J'_Φ a formula of \mathfrak{A} has been attached. Indeed, let J''_T be the set of all elements of J'_T to which no term of \mathfrak{A} has been attached. If $z \in J''_T$, we must have $z \in J'_\Psi$ (for to the elements of $J'_T - J'_\Psi$, the term a has been attached) and at least one of $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)$ must belong to J''_T . Defining $\delta(z)$ for $z \in J''_T$ as the first of $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)$, belonging to J''_T , $\delta(z)$ is defined throughout J''_T and we have $\delta(z) \in J''_T$ as well as $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$ for $z \in J''_T$. Hence, by the lemma, J''_T is empty. Further, let J''_Φ be the set of all elements of J'_Φ to which no formula of \mathfrak{A} has been attached. If $z \in J''_\Phi$, we must have $z \in J'_\Gamma + J'_A$, for in case $z \in J'_\Omega$ we have $\omega_1(z), \omega_2(z) \in J'_T$, thus, by what we have proved, some terms of \mathfrak{A} have been attached to $\omega_1(z)$ and $\omega_2(z)$; further, in case $z \in J'_\Psi - J'_\Gamma$, either $\gamma_1(z)$ or $\gamma_2(z)$, in case $z \in J'_\Phi - J'_A$, $\lambda(z)$ must belong to J''_Φ . Hence, defining

$$\delta(z) = \begin{cases} \gamma_1(z) & \text{for } z \in J''_\Phi - J'_\Gamma, \gamma_1(z) \in J''_\Phi, \\ \gamma_2(z) & \text{for } z \in J''_\Phi - J'_\Gamma, \gamma_1(z) \notin J''_\Phi, \\ \lambda(z) & \text{for } z \in J''_\Phi - J'_A, \end{cases}$$

$\delta(z)$ is defined throughout J''_{ϕ} and we have $\delta(z) \in J''_{\phi}$ as well as $\Sigma(\delta(z), z) = \uparrow$ for $z \in J''_{\phi}$; thus by the lemma, J''_{ϕ} is also empty.

Now, the above rules (ii) — (v) of attaching terms and formulae to elements of J' can be stated also as follows. (ii) If $\Psi_v(x_1, x_2, x_3, z) = \uparrow$, then some terms $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ of \mathfrak{A} have been attached to x_1, x_2, x_3 , respectively; and the term $f_v(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ has been attached to z . (iii) If $\Omega(x_1, x_2, z) = \uparrow$, then some terms $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ of \mathfrak{A} have been attached to x_1, x_2 , respectively; and the formula $F(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ has been attached to z . (iv) If $I'(x_1, x_2, z) = \uparrow$, then some formulae $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ of \mathfrak{A} have been attached to x_1, x_2 , respectively; and the formula $(\mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2)$ has been attached to z . (v) If $\Lambda(x, z) = \uparrow$, then some formula \mathbf{H} of \mathfrak{A} has been attached to x ; and the formula \mathbf{H} has been attached to z . Indeed, if $\Psi_v(x_1, x_2, x_3, z) = \uparrow$, then we have $x_1 = \psi_1(z), x_2 = \psi_2(z), x_3 = \psi_3(z) \in J'_r$; if $\Omega(x_1, x_2, z) = \uparrow$, then we have $x_1 = \omega_1(z), x_2 = \omega_2(z) \in J'_r$; if $I'(x_1, x_2, z) = \uparrow$, then we have $x_1 = \gamma_1(z), x_2 = \gamma_2(z) \in J'_p$; finally, if $\Lambda(x, z) = \uparrow$, then we have $x = \lambda(z) \in J'_\phi$.

By (18), (19) and (20) (which have also the truth of $\Xi(x, y) \rightarrow \Xi(y, x)$ as a consequence), the elements of J' for which $\Theta(x) = \uparrow$ holds (and, by (21), there are such elements), form a set which is linearly ordered by the relation $\Xi(x, y)$. Let g_1, \dots, g_m be the elements of this set in this order, so that for $\mu, \mu' = 1, \dots, m$ we have $\Xi(g_\mu, g_{\mu'}) = \uparrow$ if and only if $\mu < \mu'$. Denote by \mathbf{G}_μ the term or the formula of \mathfrak{A} attached to g_μ ($\mu = 1, \dots, m$).

By (22), we have, for each $\mu = 1, \dots, m$, one of the following possibilities.

(i) There are elements p_1, p_2 , and p_{12} of J' such that $I'(p_1, p_2, p_{12})$ and $I(p_2, p_{12}, g_\mu)$ are true.

(ii) There are elements $p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123}$, and p_{1213} of J' such that $I(p_1, p_2, p_{12}), I(p_1, p_3, p_{13}), I(p_2, p_3, p_{23}), I(p_1, p_{23}, p_{123}), I(p_{12}, p_{13}, p_{1213})$ and $I(p_{123}, p_{1213}, g_\mu)$ are true.

(iii) There are elements $p_1, p_2, p_{12}, p'_1, p'_2$, and p'_{21} of J' such that $I(p_1, p_2, p_{12}), \Lambda(p_1, p'_1), \Lambda(p_2, p'_2), I(p'_2, p'_1, p'_{21})$, and $I(p'_{21}, p_{12}, g_\mu)$ are true.

(iv) There are elements $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_r$ of J such that, for $v = 4, \dots, n$, $\Psi_v(y_1, y_2, y_3, y_v)$; for $x = 1, \dots, i$, $\Omega(y_{\mu_x}, y_{v_x}, z_{\rho_{1x}})$; for $x = 1, \dots, j$, $I(z_{\rho_{4x}}, z_{\rho_{5x}}, z_{\rho_{2x}})$; and, for $x = 1, \dots, k$, $\Lambda(z_{\rho_{6x}}; z_{\rho_{3x}})$ are true; further we have $g_\mu = z_r$.

(v) There are elements y and z of J' such that $\Theta(y), \Theta(z), \Xi(y, x), \Xi(z, x)$, and $I(y, g_\mu, z)$ are true.

In case (i), owing to $I(p_1, p_2, p_{12}) = \uparrow$, some formulae \mathbf{G} and \mathbf{H} of \mathfrak{A} have been attached to p_1 and p_2 , respectively, and the formula $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ has been attached to p_{12} . Hence, in consequence of $I(p_2, p_{12}, g_\mu) = \uparrow$, the formula $(\mathbf{H} \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}))$ has been attached to g_μ . Thus, the formula \mathbf{G}_μ attached to g_μ is an axiom of the propositional calculus.

In case (ii), owing to $I(p_1, p_2, p_{12}) = I(p_1, p_3, p_{13}) = I(p_2, p_3, p_{23}) = \uparrow$, some formulae **G**, **H**, **K** of \mathfrak{A} have been attached to p_1, p_2, p_3 , respectively, and the formulae $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$, $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K})$, $(\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K})$ have been attached to p_{12}, p_{13}, p_{23} , respectively. Hence, in consequence of $I(p_1, p_{23}, p_{123}) = I(p_{12}, p_{13}, p_{123}) = I(p_{123}, p_{123}, g_\mu) = \uparrow$, the formulae $(\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K}))$, $((\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K}))$, and $((\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K})) \rightarrow ((\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K})))$ have been attached to p_{123}, p_{123} , and g_μ , respectively. Thus, the formula G_μ attached to g_μ is an axiom of the propositional calculus in this case too.

In case (iii), owing to $I(p_1, p_2, p_{12}) = \uparrow$, some formulae **G** and **H** of \mathfrak{A} have been attached to p_1 , and p_2 , respectively, and the formula $(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H})$ has been attached to p_{12} . Hence, in consequence of $\Lambda(p_1, p'_1) \cdot \Lambda(p_2, p'_2) = I(p'_2, p'_1, p'_{21}) = I(p'_{21}, p_{12}, g_\mu) = \uparrow$, the formulae $\bar{\mathbf{G}}$, **H**, $(\mathbf{H} \rightarrow \bar{\mathbf{G}})$, and $((\mathbf{H} \rightarrow \bar{\mathbf{G}}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}))$ have been attached to p'_1, p'_2, p'_{21} , and g_μ , respectively. Thus, the formula G_μ attached to g_μ is an axiom of the propositional calculus in this case too.

In case (iv), owing to $\Psi_r(y_1, y_2, y_3, y_r) = \uparrow$, some terms $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ of \mathfrak{A} have been attached to y_1, y_2, y_3 , respectively, and the term $\mathbf{t}_r = f_r(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ has been attached to y_r ($r = 4, \dots, n$). In consequence of $\Omega(y_{\mu_z}, y_{r_z}, z_{\varrho_{1z}}) = \uparrow$ ($z = 1, \dots, i$), $I(z_{\varrho_{1z}}, z_{\varrho_{3z}}, z_{\varrho_{2z}}) = \uparrow$ ($z = 1, \dots, j$), and $\Lambda(z_{\varrho_{3z}}, z_{\varrho_{3z}}) = \uparrow$ ($z = 1, \dots, k$), some formulae **H**₁, ..., **H**_r have been attached to z_1, \dots, z_r , respectively. We assert that we have

$$(23) \quad \mathbf{H}_\varrho = \mathbf{M}_\varrho(F; \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n) = \mathbf{M}_\varrho(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3))$$

for $\varrho = 1, \dots, r$. This holds for $\varrho = \varrho_{11}, \dots, \varrho_{1i}$, for, according to $\Omega(y_{\mu_z}, y_{r_z}, z_{\varrho_{1z}}) = \uparrow$, we have

$$\mathbf{H}_{\varrho_{1z}} = F(\mathbf{t}_{\mu_z}, \mathbf{t}_{r_z}) = \mathbf{M}_{\varrho_{1z}}(F; \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)$$

for $z = 1, \dots, i$. Supposing (23) holds for each $\varrho' < \varrho$, it holds for ϱ too. Indeed, for $\varrho = \varrho_{2z}$ ($z = 1, \dots, j$) we have then, owing to $I(z_{\varrho_{4z}}, z_{\varrho_{3z}}, z_{\varrho_{2z}}) = \uparrow$, taking $\varrho_{4z} < \varrho_{2z}$ and $\varrho_{5z} < \varrho_{2z}$ into account,

$$\mathbf{H}_{\varrho_{2z}} (\mathbf{H}_{\varrho_{4z}} \rightarrow \mathbf{H}_{\varrho_{5z}}) = (\mathbf{M}_{\varrho_{4z}}(F; \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n) \rightarrow \mathbf{M}_{\varrho_{5z}}(F; \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)) \\ = \mathbf{M}_{\varrho_{2z}}(F; \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n),$$

and for $\varrho = \varrho_{3z}$ ($z = 1, \dots, k$) we have similarly, owing to $\Lambda(z_{\varrho_{6z}}, z_{\varrho_{3z}}) = \uparrow$, and $\varrho_{6z} < \varrho_{3z}$,

$$\mathbf{H}_{\varrho_{3z}} = \mathbf{H}_{\varrho_{6z}} = \bar{\mathbf{M}}_{\varrho_{6z}}(F; \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n) = \mathbf{M}_{\varrho_{3z}}(F; \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n).$$

Finally, on account of $g_\mu = z_r$, we have

$$\mathbf{G}_\mu = \mathbf{H}_r = \mathbf{M}_r(F; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, f_4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3), \dots, f_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3));$$

hence in this case, G_μ is a proper axiom.

In case (v), owing to $\Theta(y) = \Theta(z) = \uparrow$, we have $y = g_{\mu'}$, $z = g_{\mu''}$ for some $\mu', \mu'' = 1, \dots, m$. In consequence of $\Xi(y, x) = \Xi(z, x) = \uparrow$, we have $\mu' < \mu$ and $\mu'' < \mu$. In consequence of $I(y, g_\mu, z) = I(g_{\mu'}, g_\mu, g_{\mu''}) = \uparrow$, $G_{\mu'}$, G_μ and

$G_{\mu'}$ are formulae of \mathfrak{A} and we have $G_{\mu'} \vdash (G_{\mu'} \rightarrow G_{\mu})$; i. e. G_{μ} is a consequence, by the *modus ponens*, of $G_{\mu'}$ and $G_{\mu'}$.

Summarized, G_{μ} is always a formula of \mathfrak{A} ; moreover, it is either an axiom of \mathfrak{A} , or the consequence, by the *modus ponens*, of two formulae, prior to it in the sequence G_1, \dots, G_m .

By (21), there are elements x and y of J' such that $\Theta(x) \rightarrow \Theta(y) \wedge (x, y) \uparrow$; hence, we have $x = g_{\mu}$ and $y = g_{\mu'}$ for some $\mu, \mu' = 1, \dots, m$. By $\Delta(x, y) \dashv\vdash \Delta(g_{\mu}, g_{\mu'}) \uparrow$, we have $G_{\mu'} \vdash \bar{G}_{\mu}$; that is, \mathfrak{A} is inconsistent, hence **A** cannot be satisfied on any set, and our theorem holds.

The formula **B** contains the equality predicate. However, this predicate can be eliminated by known methods;²⁵ i. e., to **B** another first order formula **B'** can be constructed, not containing the equality predicate, such that **B** is satisfiable on some finite set if and only if the same holds for **B'** too.²⁶

7. As easily seen, **B** depends recursively on **A**. Hence, taking CHURCH'S theorem on the recursive unsolvability of the decision problem (loc. cit. ¹) into consideration, we get the following corollaries.

COROLLARY 1. *There exists no recursive algorithm for deciding as to which first order formulae are satisfiable on an appropriate finite set; i. e., the class of the first order formulae satisfiable on some finite set (shortly: the set of the formulae satisfiable in the finite) is non-recursive.*

COROLLARY 2, TRACHTENBROT'S THEOREM. *There exists no recursive algorithm for deciding as to which first order formulae are identically true on every finite set; i. e. the class C_{ω} of the first order formulae which are identically true on every finite set (shortly: the set of the finitely identical formulae) is non-recursive.*

Indeed, a first order formula **B** is satisfiable in the finite if and only if **B** is not finitely identical.

COROLLARY 3. *The class C_{ω} of the finitely identical formulae is not recursively enumerable.*

Indeed, as easily seen from the classical solution of the decision problem for finite sets of a given cardinal number, for each $k = 1, 2, \dots$, the class C_k of the first order formulae which are identically true on a set of k elements, and also its complementary class \bar{C}_k , i. e. the class of the first order formulae which are not identically true on a set of k elements, are recursive, depending recursively on k too. Hence, the sum $\sum \bar{C}_k$ of the classes \bar{C}_k is recursively enumerable. Obviously, $\sum C_k$ is the class of the first order formulae which are not identically true on every finite set, i. e. the complementary class

²⁵ See GÖDEL, loc. cit. ¹⁰, pp. 356—357, or L. KALMÁR, Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, *Acta Scientiarum Math.*, 4 (1929), pp. 248—252.

²⁶ Indeed, as I have remarked (loc. cit. ²⁵, p. 251), the minimal cardinal number of sets on which **B** is satisfiable equals the analogous minimal cardinal number for **B'**.

\bar{C}_ω of C_ω . Now, if C_ω would be recursively enumerable as well, then an argument due to KLEENE²⁷ would show that C_ω is a recursive class, in contradiction to TRACHTENBROT's theorem.

COROLLARY 4. *There is no axiom system with a finite number, or a recursively enumerable class, of axioms, and a finite number of recursive rules of inference,²⁸ the theorems of which are exactly the finitely identical formulae. (Shortly, the class of the finitely identical formulae is not recursively axiomatizable.)*

Indeed, according to a lemma due to ROSSER,²⁹ the theorems of an axiom system having the properties specified in Corollary 4, form a recursively enumerable class.

Corollary 4 can be contrasted with the fact that the class C_{\aleph_0} of the first order formulae which are identically true on an enumerable infinite set (hence, by LÖWENHEIM's theorem, loc. cit.⁷, the class of the first order formulae which are identically true on every set), as well as, for each finite cardinal number k , the class C_k of the first order formulae which are identically true on a set of k elements, are recursively axiomatizable (by GÖDEL's completeness theorem, loc. cit.¹⁰, and by a theorem of WAJSBERG,³⁰ respectively). Note that the class C_ω of the finitely identical formulae is deductively closed under the rules of inference of the first order predicate calculus, just as the classes C_{\aleph_0} and C_k .

As a particular case of Corollary 4 we have

COROLLARY 5. *Adjoining a finite number, or a recursively enumerable class, of finitely identical formulae to the axiom system of the first order predicate calculus, there are finitely identical formulae which do not become provable.³¹*

Indeed, owing to the deductive closure property of C_ω , all formulae which become provable are finitely identical; hence the converse cannot hold, for C_ω is not recursively axiomatizable.

Corollary 5 can be contrasted with the fact, that, according to WAJSBERG's theorem (loc. cit.³⁰), adjoining to the axioms of the first order predicate calculus an arbitrary first order formula which is identically true on a set of k elements but not on a set of $k+1$ elements, every first order formula becomes provable which is identically true on a set of k elements. Hence, such

²⁷ Loc. cit.², proof of theorem XVI, p. 741.

²⁸ In the sense of B. ROSSER, Extensions of some theorems of Gödel and Church, *The Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), pp. 87—91, especially Definition on p. 88. (Formulae have to be replaced by their Gödel numbers.)

²⁹ Loc. cit.²⁸, Lemma II on pp. 88—89.

³⁰ M. WAJSBERG, Untersuchungen über den Funktionenkalkül für endliche Individuenbereiche, *Math. Annalen*, **108** (1933), pp. 218—228.

³¹ See (for the case of one new axiom) TPAXTEHPOT, loc. cit., p. 571.

an axiom can be interpreted as a condition to the effect that there are not more than k individuals. Analogously, one is ready to consider a finitely identical formula which is not identically true on an infinite set as a finiteness condition for the set of individuals. Corollary 5 shows that given a finite number or even a recursively enumerable class of such finiteness conditions, there is a further finiteness condition which is not deducible of them within the axiom system of the first order predicate calculus.³²

COROLLARY 6. *The class $C_\omega - C_{\aleph_0}$ of the first order formulae which are identically true on each finite set, but not on an infinite set, is not recursively enumerable.*

Indeed, the class C_{\aleph_0} is recursively axiomatizable, hence recursively enumerable. If the same would hold for the class $C_\omega - C_{\aleph_0}$ too, then the sum C_ω of C_{\aleph_0} and $C_\omega - C_{\aleph_0}$ would be recursively enumerable as well.

(Received 29 August 1950)

³² In D. HILBERT und P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1 (Berlin, 1934) p. 124, footnote 1, for the particular finitely identical formulae

$$(x)\bar{R}(x, x) \& (x)(y)(z)(R(x, y)R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow (Ex)(y)\bar{R}(x, y)$$

and

$$(Ex)(y)S(y, x) \& (x)(y)(z)(u)(S(x, u)S(y, u)S(v, x) \rightarrow \bar{S}(v, y)) \rightarrow (Ex)(y)S(x, y)$$

the conjecture has been expressed that neither of them becomes provable when the other adjoined to the axioms of the first order predicate calculus. (*Added in the proof, 5 November 1951.* This conjecture has been proved since by H. HASENJAEGER, Über eine Art von Unvollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, *The Journal of Symbolic Logic*, **15** (1950), pp. 273—276.)

ВКЛАДЫ В ТЕОРИЮ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ

Четвёртая статья

Приведение на случай конечного множества индивидуумов

Л. КАЛЬМАР (Сегед)

(Резюме)

В этой статье автор доказывает следующую теорему:

Для любой формулы **A** (узкого исчисления предикатов) можно построить другую формулу **B** такого рода, что **A** выполнима в том и только в том случае, если нет конечного множества, на котором **B** выполнима.

Значит, проблема разрешимости приводима к проблеме выполнимости формул узкого исчисления предикатов на конечных классах. Это является улучшением теоремы Левенгейма, которая приводит проблемы разрешимости на случай счетных множеств.

В качестве следствия доказана теорема Трахтенброта о рекурсивной неразрешимости проблемы выполнимости формул узкого исчисления предикатов на конечных классах. Из этого автор доказывает, что множество формул узкого исчисления предикатов тождественно истинных на любом конечном классе, не является рекурсивно счетным и, поэтому, хотя замкнуто относительно дедукции, не рекурсивно аксиоматизируемо. Дальше множество формул узкого исчисления предикатов, тождественно истинных на любом конечном классе, но не тождественно истинных на бесконечных классах, не является рекурсивно счетным.

EINE GEOMETRISCHE CHARAKTERISIERUNG DER FINSLERSCHEN RÄUME SKALARER UND KONSTANTER KRÜMMUNG

Von

O. VARGA (Debrecen), korrespondierendem Mitglied der Akademie

Unter den Riemannschen Räumen V_n , spielte seit jeher die Klasse derjenigen von konstanter Krümmung S_n eine besondere Rolle. Bloß für den Fall, daß die Krümmung null ist, der vorliegende Raum also mit einem euklidischen Raum identisch ist, ist in der Fachliteratur die Charakterisierung mittels der (Levi-Civitaschen) Parallelverschiebung längs einer geschlossenen Kurve allgemein bekannt. Aber auch die Räume von konstanter nicht verschwindender Krümmung lassen, wie einer Arbeit von E. BORTOLOTTI zu entnehmen ist,¹ eine Charakterisierung mittels Parallelführung um eine geschlossene Kurve zu. Zur Orientierung formulieren wir den Satz bloß für den Fall eines infinitesimalen Parallelogrammes und verweisen wegen allgemeinerer Annahmen auf unsere Arbeit, die ja auch den Fall eines Riemannschen Raumes in sich schließt. Das Kriterium können wir dann so fassen: Der V_n ist dann und nur dann ein S_n , falls bei Parallelführung eines Vektors um ein infinitesimales Parallelogramm, die Differenz zwischen Anfangs- und Endlage der 2-Richtung des Parallelogrammes angehört, falls Größen von höherer Kleinheitsordnung als die Maßzahl des Parallelogrammes vernachlässigt werden. Der Satz ist analytisch damit äquivalent, daß der Weylsche Projektivkrümmungsaffinor verschwindet, der V_n also geodetisch auf einen gewöhnlichen affinen Raum abbildbar ist, was nach dem Beltramischen Satz die Konstanz der Krümmung nach sich zieht. Hieraus folgt, daß unter den affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit symmetrischem Zusammenhang die projektiv-ebenen Räume durch dasselbe Kriterium charakterisiert werden können. Für Finslersche Räume hat L. BERWALD ein Krümmungsmaß R definiert, das die Verallgemeinerung des Riemannschen Krümmungsmaßes darstellt. Es ist für diejenige 2-Richtung erklärt, deren eine Richtung γ^α mit der Richtung des im betreffenden Punkt vorgegebenen Linienelementes zusammenfällt,

¹ E. BORTOLOTTI [1] (siehe Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit), insbes. S. 95.

während die zweite Richtung r^α willkürlich ist. Es ist also $R = R(x, r, r)$. Falls R nur eine Funktion der Linienelementmannigfaltigkeit ist, d. h. unabhängig von r^α ist, heißt der Raum nach L. BERWALD von skalarer Krümmung. Ist R eine Konstante, so ist der Raum ein solcher von konstanter Krümmung.² Hauptziel dieser Arbeit ist nun die in den Sätzen 1 und 3 des § 2 enthaltene Charakterisierung der Räume skalarer bzw. konstanter Krümmung durch Parallelführung eines Vektors um eine geschlossene einfache Kurve. Mit diesen Sätzen äquivalent sind die Sätze 2 und 4 des § 2, die eine Charakterisierung der Räume skalarer und konstanter Krümmung mittels eines Krümmungsaffinors zulassen. Da wir in unserer Darstellung die affine Theorie der Bahnen nicht benützen,³ weiter hervorheben wollen, daß die Krümmungsverhältnisse durch den von Verf. eingeführten Hauptkrümmungsaffinor⁴ gekennzeichnet werden, haben wir in dem § 1 eine Zusammenstellung der Grundbegriffe des Finslerschen Raumes von diesem Gesichtspunkt aus gegeben. Dabei konnten wir unter Benutzung von Ergebnissen von H. TIETZE⁵ eine unseren Zwecken entsprechende Herleitung des Krümmungsaffinors durch Herumführung um eine einfache geschlossene Kurve geben.

§ 1. Grundbegriffe der Finslerschen Geometrie

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Koordinaten x^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) wird dadurch zu einem Finslerschen Raum, daß eine Grundfunktion $L(x, v)$ der $2n$ Veränderlichen x^α, v^α vorgegeben wird, mittels der für eine beliebige mindestens einmal stetig differenzierbare Kurve $x^\alpha = x^\alpha(t)$, eine Bogenlänge s durch

$$(1, 1) \quad s = \int_{t_0}^t L\left(x(t), \frac{dx}{dt}\right) dt$$

bestimmt ist. Von der Grundfunktion $L(x, v)$ wird vorausgesetzt, daß sie eine in den v^α von erster Ordnung positiv-homogene positive Funktion ist, die hinsichtlich sämtlicher Veränderlicher stetige partielle Ableitungen der ersten vier Ordnungen besitzt und daß ferner die mit den

$$(1, 2) \quad g_{\alpha\beta} = \partial_{v^\alpha} \partial_{v^\beta} \left(\frac{1}{2} L^2 \right); \quad \partial_{v^\alpha} F = \frac{\partial F}{\partial v^\alpha}$$

gebildete quadratische Form

$$(1, 3) \quad g_{\alpha\beta}(x, v) X^\alpha X^\beta$$

² Siehe L. BERWALD [1], insbes. No. 25.

³ Eine äußerst übersichtliche Darstellung von diesem Gesichtspunkt aus findet sich bei L. BERWALD [2], insbes. No. 2.

⁴ Siehe O. VARGA [1], § 3.

⁵ Siehe H. TIETZE [1].

der Hilfsveränderlichen X^{α} , für alle zulässigen Wertesysteme der x^{α} und v^{α} (das Wertesystem $v^{\alpha} = 0$ ausgeschlossen) positiv definit ist. Die Finslersche Geometrie kann nun nach E. CARTAN⁶ der Theorie einer $(2n-1)$ -dimensionalen euklidisch zusammenhängenden Mannigfaltigkeit von Linienelementen unterordnet werden. Die Transformationsschar, die dem Studium einer solchen Mannigfaltigkeit zu Grunde liegt, besteht aus den zumindestens als viermal stetig differenzierbar vorausgesetzten Transformationen

$$(1, 4) \quad x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^{\alpha}), \quad \text{Det } A_{\alpha}^{\alpha'} \neq 0; \quad A_{\alpha}^{\alpha'} \stackrel{\text{def.}}{=} \partial_{\alpha} x^{\alpha'}$$

und den Transformationen

$$(1, 5) \quad v^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'} v^{\alpha}.$$

Die Mannigfaltigkeit wird bestimmt:

I. Durch Angabe eines kovarianten Tensors 2-ter Stufe $g_{\alpha\beta}(x, v)$, der den „Bogen“ einer mindestens einmal stetig differenzierbaren Linienelementfolge

$$(1, 6) \quad x^{\alpha} = x^{\alpha}(t), \quad v^{\alpha} = v^{\alpha}(t)$$

durch das Integral

$$(1, 7) \quad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\alpha\beta}(x(t), v(t)) \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dx^{\beta}}{dt}} dt$$

bestimmt.

Die Form $g_{\alpha\beta}(x, v) X^{\alpha} X^{\beta}$ möge denselben Forderungen genügen, wie die Form (1, 3).

II. Durch Angabe einer invarianten Ableitung

$$(1, 8) \quad \frac{\delta \xi^{\alpha}}{dt} = \frac{d\xi^{\alpha}}{dt} + \left[C_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dv^{\beta}}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{dt} \right] \xi^{\gamma},$$

die dem längs (1, 6) definierten Vektorfeld $\xi^{\alpha}(x, v)$ das Vektorfeld $\frac{\delta \xi^{\alpha}}{dt}$ zuordnet.

Da Affinoren in den v^{α} stets von von nullter Ordnung homogen sein sollen, folgt aus (1, 8) unmittelbar, daß die $C_{\beta\gamma}^{\alpha}$ von (-1) -ter Ordnung, die $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ von nullter Ordnung positiv-homogen in den v^{α} sind und daß ferner

$$(1, 9) \quad C_{\beta\gamma}^{\alpha} v^{\beta} = 0$$

gilt.

Falls für ein längs (1, 6) erklärtes Vektorfeld

$$(1, 10) \quad \frac{\delta \xi^{\alpha}}{dt} = 0$$

besteht, so wird es als parallel in Bezug auf (1, 6) bezeichnet. Umgekehrt stellt (1, 10) ein Differentialgleichungssystem dar so, daß man einen Vektor stets längs einer vorgegebenen Linienelementfolge parallel verschieben kann.

⁶ Siehe E. CARTAN [1], wo die in diesem Paragraphen nur angedeuteten Formeln (1, 1) — (1, 22) auf S. 3—17 ausführlich hergeleitet werden.

Wird die Länge und der Winkel von Vektoren mit Hilfe von $g_{\alpha\beta}$ so wie in der Riemannschen Geometrie erklärt, dann lautet die dritte Forderung:

III. Die Länge von Vektoren und der von zwei Vektoren eingeschlossene Winkel bleibe bei einer Parallelverschiebung ungeändert.

Dies führt zu den Beziehungen

$$(1, 11) \quad \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha}; \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\varrho} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\varrho}$$

und

$$(1, 12) \quad \partial_{\varrho\beta} g_{\alpha\beta} = C_{\gamma\alpha\beta} + C_{\gamma\beta\alpha}; \quad C_{\alpha\beta\gamma} = g_{\varrho\gamma} C_{\alpha\beta}^{\varrho}$$

Der Finslersche Raum unterordnet sich nun der Linienelementmännigfaltigkeit dadurch, daß wir $g_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta\gamma}$ und $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ mit Hilfe der Grundfunktion so bestimmen, daß I, II und III in koordinateninvarianter Art bestehen. $g_{\alpha\beta}$ soll durch (1, 2) bestimmt sein. Ferner sei

$$(1, 13) \quad C_{\beta\gamma\delta} = g_{\varrho\delta} C_{\beta\gamma}^{\varrho} = \frac{1}{3} \partial_{\alpha\beta} \partial_{\gamma\delta} \partial_{\alpha\gamma} L^2$$

und

$$(1, 14) \quad \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) + C_{\varrho\beta\alpha} G_\gamma^{\varrho} - C_{\varrho\gamma\alpha} G_\beta^{\varrho},$$

wobei

$$(1, 15) \quad G_\beta^\alpha = \partial_{v\beta} G^\alpha; \quad G^\alpha = \frac{1}{4} g^{\alpha\varrho} [v^\kappa \partial_{v\varrho} \partial_{v^\kappa} L^2 - \partial_\varrho L^2].$$

Die Relationen (1, 11) und (1, 12) sind auf Grund von (1, 13) und (1, 14) offensichtlich erfüllt.

Wir bemerken noch, daß die in (1, 15) auftretenden, in den v^α von 2-ter Ordnung positiv-homogenen Funktionen G^α gerade die Eulerschen Differentialgleichungen des zur Grundfunktion $L(x, v)$ gehörigen Variationsproblems bestimmen. Geht man nämlich von den bekannten Eulerschen Differentialgleichungen

$$(1, 16) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\beta} - \frac{\partial L}{\partial x^\beta} = 0; \quad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$$

aus, und führt den durch (1, 1) bestimmten Bogenparameter s ein, so können diese Differentialgleichungen auf die Gestalt

$$(1, 17) \quad \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + 2 G^\alpha \left(x, \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

gebracht werden.

Wir bezeichnen den Einheitsvektor

$$(1, 18) \quad l^\alpha = \frac{v^\alpha}{L(x, v)},$$

dessen Richtung mit der seines Linienelementes zusammenfällt, als normiertes Linienelement. Aus (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 14) und (1, 15) folgt, daß die

normierten Linienelemente in Bezug auf die Linienelementfolge (1, 6) parallel sind, falls

$$(1, 19) \quad \frac{dl^\alpha}{dt} = -G_{\beta}^{\cdot\alpha}(x, l) \frac{dx^\beta}{dt} \equiv -\frac{1}{L} G_{\beta}^{\cdot\alpha}(x, v) \frac{dx^\beta}{dt}$$

gilt. Wegen (1, 18) bedeutet dies eine Differentialgleichung für die l^α . Demnach kann ein normiertes Linienelement bloß längs einer Kurve $x^\alpha = x^\alpha(t)$ parallel verschoben werden und nicht längs einer Linienelementfolge. Falls für eine Linienelementfolge (1, 6) die normierten Linienelemente parallel sind (d. h. (1, 19) gilt), wollen wir, der Kürze wegen, die Linienelementfolge (1, 6) als parallel bezeichnen. Die invariante Ableitung eines Vektorfeldes ξ^α längs einer Folge von parallelen Linienelementen wird wegen (1, 8) und (1, 9) von der Gestalt

$$(1, 20) \quad \frac{\delta \xi^\alpha}{dt} = \frac{d\xi^\alpha}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^{*\alpha}(x, v) \frac{dx^\beta}{dt} \xi^\gamma$$

sein, wobei

$$(1, 21) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{*\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{*\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - G_{\beta}^{\cdot\alpha} C_{\gamma}^{\cdot\alpha}$$

gesetzt werde.

Falls in der Linienelementfolge (1, 6) $x^\alpha(t) \equiv x^\alpha$ ist, dann wird die durch (1, 10) bestimmte Parallelverschiebung zu einer durch

$$(1, 22) \quad \frac{d\xi^\alpha}{dt} = -C_{\beta\gamma}^{\cdot\alpha} \frac{dx^\beta}{dt} \xi^\gamma$$

erklärten Drehung.

Zu den Krümmungsaffinoren kann man in entsprechender Verallgemeinerung zur Riemannschen Geometrie durch Parallelführung um eine geschlossene Linienelementfolge gelangen. Im folgenden benötigen wir ausschließlich den ganz speziellen Fall, in dem ein normiertes Linienelement um eine geschlossene Kurve parallelverschoben wird. Wir betrachten eine auf der Fläche

$$(1, 23) \quad x^\alpha = x^\alpha(u, v)$$

gelegene, doppelpunktfrei durch

$$(1, 24) \quad u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

bestimmte Kurve. Aus (1, 19) folgt für den Differenzenvektor

$$(1, 25) \quad \Delta l^\alpha = l^\alpha(t_1) - l^\alpha(t_0)$$

zwischen Anfangs- und Endlage

$$(1, 26) \quad \Delta l^\alpha = - \int_{t_0}^{t_1} G_{\beta}^{\cdot\alpha}(x, l) \frac{dx^\beta}{dt} dt.$$

Trifft man die Voraussetzungen, daß für die in der (u, v) -Parameterebene liegende Kurve (1, 24)

$$(1, 27) \quad |u(t) - u_0| < \Delta u, \quad |v(t) - v_0| < \Delta v; \quad \varepsilon \doteq \Delta u + \Delta v$$

gilt, und ihre (euklidisch gemessene) Länge kleiner als $\mu\epsilon$ ist (μ eine positive Konstante), so kann man für das in (1, 26) auftretende Integral in Verallgemeinerung von Überlegungen von H. TIETZE⁷ zeigen, daß

$$(1, 28) \quad \mathcal{A}I^\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(-G_{\dot{\beta}}{}^\alpha(x, l) \frac{\partial x^\beta}{\partial r} \right) \frac{dr}{dt} - \left(G_{\dot{\beta}}{}^\alpha(x, l) \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \right) \frac{du}{dt} \right] dt = \\ = \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(-G_{\dot{\beta}}{}^\alpha(x, l) \frac{\partial x^\beta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(G_{\dot{\beta}}{}^\alpha(x, l) \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \right) \right]_{t=t_0} \mathcal{A}\bar{S} + O^\alpha(\epsilon^3)$$

gilt.

Auf der rechten Seite von (1, 28) bedeutet $\mathcal{A}\bar{S}$ den (euklidisch gemessenen) Flächeninhalt, der von der Kurve (1, 24) eingeschlossen wird, und $O^\alpha(\epsilon^3)$ für jeden Wert von α die aus der Zahlentheorie bekannte Funktion. Es ist also

$$(1, 29) \quad O^\alpha(\epsilon^3) \leq K^\alpha \cdot \epsilon^3,$$

wobei die positiven Konstanten K^α von dem Anfangslinienelement x_0^α, r_0^α , den Werten der Funktionen (1, 23), den Größen $G_{\dot{\beta}}{}^\alpha$ und ihren partiellen Ableitungen abhängen, hingegen unabhängig von $\mathcal{A}u, \mathcal{A}r$ und der gewählten Kurve sind.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial u}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial r}$ in dem dritten Porten von (1, 28) haben ebenfalls die bei TIETZE angegebene symbolische Bedeutung,⁸ d. h. man bilde, falls irgend eine Funktion von x^α und r^α gegeben ist, die Richtungsableitung

$$(1, 30) \quad \frac{dF}{dt} = F_1 \frac{du}{dt} + F_2 \frac{dr}{dt}.$$

Es bedeutet dann $F_1 = \frac{\partial}{\partial u}(F)$, $F_2 = \frac{\partial}{\partial r}(F)$. Bei der Bildung von (1, 30) ist noch zu berücksichtigen, daß die $\frac{dr^\alpha}{dt}$ der Gleichung (1, 19) zu genügen haben. Beachtet man dies, so ergibt die Berechnung von (1, 28)

$$(1, 31) \quad \mathcal{A}I^\alpha = \frac{1}{2} R_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{}^\alpha(x_0, r_0) \left(\frac{\partial(x^\beta x^\gamma)}{\partial(u, r)} \right)_{t=t_0} \mathcal{A}\bar{S} + O^\alpha(\epsilon^3),$$

mit

$$(1, 32) \quad R_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{}^\alpha(x, r) = \frac{2}{L} [\partial_{[\beta} G_{\dot{\gamma}]}{}^\alpha + G_{[\beta} \dot{\partial}_{\gamma]}{}^\alpha G_{\dot{\gamma}}{}^\alpha]; \quad G_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{}^\alpha = \partial_{r^\beta} G_{r^\gamma}{}^\alpha.$$

Führen wir für die beiden Vektoren

$$(1, 33) \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} \mathcal{A}\bar{S} = t_1^\alpha,$$

$$(1, 34) \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial r} \mathcal{A}\bar{S} = t_2^\alpha,$$

⁷ Siehe H. TIETZE [1], insbes. die No. 1—6.

⁸ Siehe in H. TIETZE [1] die Formeln (12) auf S. 311.

die der die Fläche (1, 23) in u, v berührenden 2-Richtung angehören, ein, so kann (1, 31) wegen der schiefen Symmetrie in den Zeigern β und δ auch auf die Form

$$(1, 31') \quad \Delta l^\alpha = R_{\beta\delta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}(x_0, v_0) t_1^\delta t_2^\beta + O^\alpha(\varepsilon^3)$$

gebracht werden. Der Affinor (1, 32) tritt zuerst bei E. CARTAN⁹ auf, und für den Fall der affinen Theorie bei L. BERWALD.¹⁰ Wir können die eben betrachtete Folge von parallelen Linienelementen längs der durch (1, 23) und (1, 24) bestimmten Kurve dadurch abschließen, daß wir zwischen $l^\alpha(t_1)$ und $l^\alpha(t_0)$ eine Linienelementfolge

$$(1, 35) \quad l^\alpha = l^\alpha(t_1) + \sigma(l^\alpha(t_0) - l^\alpha(t_1)) \quad 0 \leq \sigma \leq 1$$

einschalten. Wird längs der so gewonnenen Linienelementfolge ein Vektor ξ^α gemäß (1, 10) und (1, 20) parallelverschoben, so erhält man durch eine ähnliche Überlegung wie oben, bei der jetzt noch die Paralleldrehung (1, 22) ferner (1, 31) zu benützen ist, für den Differenzenvektor von Anfangs- und Endlage

$$(1, 36) \quad \Delta \xi^\alpha = \xi^\alpha(t_1) - \xi^\alpha(t_0) = R_{\beta\delta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}(x_0, v_0) \left(\frac{\partial(x^\delta x^\beta)}{\partial(u, v)} \right)_{t=t_0} \cdot \xi^\alpha(t_0) \Delta \bar{S} + O^\alpha(\varepsilon^3),$$

wobei jetzt¹¹

$$(1, 37) \quad R_{\beta\delta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}(x, v) = 2\partial_{[\beta} I_{\delta]}^{\cdot\cdot\alpha} - 2G_{[\beta}^0 \partial_{v]} I_{\delta]}^{\cdot\cdot\alpha} + 2I_{[\delta]}^{\cdot\cdot 0} I_{\beta]}^{\cdot\cdot\alpha}.$$

Die in (1, 29) auftretenden Konstanten K^α hängen jetzt auch von den $I_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot\alpha}$ und ihren partiellen Ableitungen ab. Wir merken noch den sich aus (1, 37) und (1, 32) ergebenden Hauptkrümmungsaffinor

$$(1, 38) \quad T_{\beta\delta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = R_{\beta\delta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} - L C_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot\alpha} R_{\delta}^{\cdot\cdot\alpha}$$

an.¹² Es kann nachgewiesen werden, daß derselbe dadurch entsteht, wenn der oben betrachtete Vektor nicht um die durch (1, 35) abgeschlossene Folge von parallelen Linienelementen herumgeführt wird.

§. 2. Finslersche Räume von skalarem und konstantem Krümmungsmaß

Um das von L. BERWALD eingeführte Krümmungsmaß definieren zu können, führen wir die rein kovarianten Komponenten des Krümmungsaffinors $R_{\beta\delta\gamma}^{\cdot\cdot\alpha}$ gemäß

⁹ E. CARTAN [1], S. 36, Formel XX, wo dieser Affinor mit $R_0^{\alpha}{}_{\delta\beta}$ bezeichnet ist.

¹⁰ L. BERWALD [2], S. 759, Formel (2, 9). Der dort auftretende mit $K_\delta^{\alpha}{}_\beta$ bezeichnete Affinor steht mit dem hier behandelten in dem durch $L R_{\beta\delta}^{\cdot\cdot\alpha} = K_\delta^{\alpha}{}_\beta$ bestimmten Zusammenhang.

¹¹ Tritt zuerst in E. CARTAN [1] auf. Siehe S. 36, Formel (XIX). Dort wird dieser Affinor mit $R_\gamma^{\alpha}{}_{\delta\beta}$ bezeichnet.

- Für den Fall von affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten zuerst in O. VARGA [1], S. 13, Formel (3, 13).

$$(2, 1) \quad R_{\beta\delta\gamma\epsilon}(x, v) = g_{\alpha\epsilon}(x, v) R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}(x, v)$$

ein.

Setzen wir ferner

$$(2, 2) \quad T_{\beta\delta}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} T_{\beta\delta\gamma}^{\alpha} l^{\gamma},$$

dann folgt wegen (1, 9), (1, 13), (1, 14), (1, 21), (1, 32) und (1, 37)

$$(2, 3) \quad R_{\beta\delta\gamma}^{\alpha} l^{\gamma} = T_{\beta\delta\gamma}^{\alpha} l^{\gamma} = R_{\beta\delta}^{\alpha} = T_{\beta\delta}^{\alpha}.$$

Aus (2, 1) und (2, 3) ergibt sich:

$$(2, 4) \quad R_{\beta\delta\epsilon} = g_{\alpha\epsilon} R_{\beta\delta}^{\alpha} = R_{\beta\delta\gamma\epsilon} l^{\gamma},$$

$$(2, 4') \quad T_{\beta\delta\epsilon} = g_{\alpha\epsilon} T_{\beta\delta}^{\alpha} = T_{\beta\delta\gamma\epsilon} l^{\gamma},$$

$$(2, 4'') \quad T_{\beta\delta\epsilon} = R_{\beta\delta\epsilon}.$$

Außer diesen Affinoren benötigen wir noch die folgenden sich aus $R_{\beta\delta}^{\alpha}$ bzw. $T_{\beta\delta}^{\alpha}$ durch Überschiebung mit dem normierten Linienelement ergebenden Affinoren

$$(2, 5) \quad R_{\beta\epsilon}^* \stackrel{\text{def}}{=} R_{\beta\delta\epsilon} l^{\delta} = R_{\beta\delta\gamma\epsilon} l^{\delta} l^{\gamma},$$

$$(2, 5') \quad T_{\beta\epsilon}^* \stackrel{\text{def}}{=} T_{\beta\delta\epsilon} l^{\delta} = T_{\beta\delta\gamma\epsilon} l^{\delta} l^{\gamma},$$

für die wegen (2, 4'')

$$(2, 5'') \quad R_{\beta\epsilon}^* = T_{\beta\epsilon}^*$$

gilt. Durch Heraufziehen des Zeigers ϵ in (2, 5'') folgt wegen (2, 3), (2, 4) und (2, 4')

$$(2, 6) \quad R_{\beta}^{*\alpha} = T_{\beta}^{*\alpha} = R_{\beta\delta}^{\alpha} l^{\delta} = T_{\beta\delta}^{\alpha} l^{\delta}.$$

Durch Verjüngung von $R_{\beta}^{*\alpha}$ erhalten wir den durch

$$(2, 7) \quad R^*(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} R_{\alpha}^{*\alpha} = \frac{1}{n-1} T_{\alpha}^{*\alpha}$$

erklärten Skalar.

Die Verjüngung des Krümmungsaffinors $R_{\beta\delta\gamma}^{\alpha}$ und des Hauptkrümmungsaffinors $T_{\beta\delta\gamma}^{\alpha}$ führt zu den beiden durch

$$(2, 8) \quad R_{\delta\gamma}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\alpha\delta\gamma}^{\alpha},$$

$$(2, 9) \quad T_{\delta\gamma}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} T_{\alpha\delta\gamma}^{\alpha}$$

bestimmten Affinoren. Der Zusammenhang zwischen diesen Affinoren ergibt sich unmittelbar aus (1, 38) in der Form

$$(2, 10) \quad R_{\delta\gamma} = T_{\delta\gamma} + C_{\epsilon\gamma}^{\mu} R_{\delta\mu}^{\epsilon}.$$

Aus den Affinoren (2, 8) und (2, 9) gewinnt man durch Überschiebung mit l^{γ} die Vektoren

$$(2, 11) \quad R_{\delta}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\delta\gamma}^{\alpha} l^{\gamma}$$

und

$$(2, 12) \quad T_{\delta}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} T_{\delta\gamma}^{\alpha} l^{\gamma},$$

für die wegen (2, 10), (1, 9) und (1, 13)

$$(2, 13) \quad R_{\delta} = T_{\delta}$$

gilt. Nochmalige Überschiebung mit l^{δ} gibt den Skalar

$$(2, 14) \quad R(x, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} R_{\delta} l^{\delta} = \frac{1}{n-1} T_{\delta} l^{\delta}.$$

Aus (2, 3), den Definitionen (2, 8) und (2, 11) von $R_{\delta\gamma}$ bzw. R_{δ} folgt, daß

$$(2, 15) \quad R_{\delta} = R_{\mu\delta}{}^{\mu}$$

ist. Entsprechend folgt aus (2, 3), (2, 9), (2, 12) und (2, 13):

$$(2, 16) \quad R_{\delta} = T_{\delta} = T_{\mu\delta}{}^{\mu}.$$

Aus (2, 6), (2, 7), (2, 14) — (2, 16) folgt

$$(2, 17) \quad R^*(x, \nu) = R(x, \nu).$$

Wir heben noch folgendes Ergebnis hervor, daß eine Folge von (2, 14) ist:

Der Krümmungsskalar $R(x, \nu)$ des Finslerschen Raumes kann aus dem Hauptkrümmungsaffinor (1, 38) durch Verjüngung bzw. Überschiebung mit dem normierten Linienelement gewonnen werden.

Eine wichtige Feststellung, die auf Grund der Definition (2, 5) von $R_{\beta\alpha}^*$ durch eine Rechnung aus (1, 32) und (2, 1) folgt, ist die Symmetrieeigenschaft¹³

$$(2, 18) \quad R_{\beta\alpha}^* = R_{\alpha\beta}^*.$$

Wir setzen im folgenden $n \geq 3$ voraus.

Wir betrachten nun das normierte Linienelement (x, l) und den in denselben definierten, von ihm linear unabhängigen Vektor ν^{α} . Die für die 2-Richtung l^{α} , η^{α} des Linienelementes (x, l) bestimmte Invariante

$$(2, 19) \quad R(x, \nu, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_{\beta\delta\gamma\epsilon} \eta^{\beta} \eta^{\epsilon} l^{\delta} l^{\gamma}}{(g_{\beta\epsilon} g_{\delta\gamma} - g_{\beta\gamma} g_{\delta\epsilon}) \eta^{\beta} \eta^{\epsilon} l^{\delta} l^{\gamma}}$$

ist das zu dieser 2-Richtung gehörige Berwaldsche Krümmungsmaß des Finslerschen Raumes. Aus (2, 5), (2, 5') und daraus, daß l^{α} ein Einheitsvektor ist, folgt für das Krümmungsmaß sofort die Darstellung

$$(2, 20) \quad R(x, \nu, \eta) = \frac{R_{\beta\epsilon}^* \eta^{\beta} \eta^{\epsilon}}{(g_{\beta\epsilon} - l_{\beta} l_{\epsilon}) \eta^{\beta} \eta^{\epsilon}} = \frac{T_{\beta\epsilon}^* \eta^{\beta} \eta^{\epsilon}}{(g_{\beta\epsilon} - l_{\beta} l_{\epsilon}) \eta^{\beta} \eta^{\epsilon}}.$$

Das Krümmungsmaß läßt sich also aus dem Hauptkrümmungsaffinor, dem metrischen Grundtensor $g_{\alpha\beta}$ und dem Vektor l^{α} herleiten.

Falls $R(x, \nu, \eta)$ ein von η^{α} unabhängiger Skalar $I(x, \nu)$ ist, so heißt der Finslersche Raum von skalarer Krümmung. Ist $I(x, \nu)$ eine Konstante, so heißt der Raum von konstanter Krümmung.¹⁴ L. BERWALD hat in Verallgemeinerung

¹³ Vgl. E. CARTAN [1], S. 32, Formel XXIII, wo statt $R_{\alpha\beta}^*$ die Bezeichnung $R_{0\alpha 0\beta}$ verwendet wird.

¹⁴ Vgl. L. BERWALD [2], S. 773—774.

eines Ergebnisses von F. SCHUR nachgewiesen, daß aus der Unabhängigkeit des Krümmungsmaßes $I(x, r)$ von der Richtung schon seine Konstanz folgt.¹⁵ Für einen Raum skalarer Krümmung folgt aus der Willkürlichkeit von r^α und der Symmetrieeigenschaft (2, 18) die Beziehung

$$(2, 21) \quad R^*_{\beta\epsilon} = I(x, r)(g_{\beta\epsilon} - l_\beta l_\epsilon)$$

und hieraus durch Überschiebung mit $g^{\alpha\epsilon}$

$$(2, 21') \quad R^{\star\cdot\alpha}_{\beta} = I(x, r)(\delta^\alpha_\beta - l_\beta l^\alpha).$$

Durch Verjüngung folgt hieraus wegen (2, 12) und (2, 17)

$$(2, 22) \quad I(x, r) = R(x, r).$$

Das Krümmungsmaß eines Finslerschen Raumes skalarer Krümmung ist sonach mit dem Krümmungsskalar identisch.

Aus (2, 22) folgen wegen (2, 21) und (2, 21') die für den Finslerschen Raum skalarer Krümmung charakteristische Relation

$$(2, 23) \quad R^*_{\beta\epsilon} = R(x, r)(g_{\beta\epsilon} - l_\beta l_\epsilon),$$

bzw.

$$(2, 23') \quad R^{\star\cdot\alpha}_{\beta} = R(x, r)(\delta^\alpha_\beta - l_\beta l^\alpha).$$

Benützt man die aus (1, 32) und (2, 6) folgende Beziehung

$$(2, 24) \quad L^2 R^{\star\cdot\alpha}_{\beta} = 2\partial_\beta G^\alpha - \partial_{r\beta} G^0 \partial_{re} G^\alpha - \partial_e G_{\beta}{}^\alpha r_e + 2G_{\beta e}{}^\alpha G^e,$$

so kann man $R^{\star\cdot\alpha}_{\beta\delta}$ in der Form

$$(2, 25) \quad L R^{\star\cdot\alpha}_{\beta\delta} = \frac{2}{3} \partial_{\alpha\beta} L^2 R^{\star\cdot\alpha}_{\delta} +$$

darstellen.¹⁶ Ist der Raum von skalarer Krümmung, so können auf der rechten Seite von (2, 25) die sich aus (2, 23') ergebenden Werte von $R^{\star\cdot\alpha}_{\beta}$ eingeführt werden. Dies gibt¹⁷

$$(2, 26) \quad R^{\star\cdot\alpha}_{\beta\delta} = \left(\frac{1}{3} L \cdot \partial_{r\delta} R + R l_\delta \right) \delta^\alpha_\beta - \left(\frac{1}{3} L \cdot \partial_{r\beta} R + R l_\beta \right) \delta^\alpha_\delta + \\ + \frac{1}{3} (l_\delta \cdot \partial_{r\beta} R - l_\beta \partial_{r\delta} R) l^\alpha.$$

Die durch (2, 26) bestimmte Form des Affinors (2, 26) ist für Räume skalarer Krümmung charakteristisch, wie schon L. BERWALD bemerkt hat. In der Tat erhält man nach Überschiebung mit l^δ die Relationen (2, 23). Für Räume konstanter Krümmung folgt aus (2, 26) als kennzeichnend die Beziehung

$$(2, 27) \quad R^{\star\cdot\alpha}_{\beta\delta} = 2R \delta^\alpha_{[\beta} l_{\delta]}.$$

¹⁵ Vgl. L. BERWALD [2], No. 16.

¹⁶ Die Formeln (2, 23), (2, 25) bei L. BERWALD, No. 13. Formel (2, 24) bei E. CARTAN [1], S. 36, Formel XXI.

¹⁷ Vgl. L. BERWALD [2], S. 774, Formel (13, 5).

Führt man das normierte Linienelement l^α um eine gemäß (1, 23) und (1, 24) bestimmte und den dort angegebenen Anforderungen genügende Kurve eines Raumes skalarer Krümmung herum, so folgt für den Differenzenvektor Δl^α von Anfangs- und Endlage wegen (1, 31') und der Gestalt (2, 26) des Affinors $R_{\beta\delta}^\alpha$ die Beziehung

$$(2, 28) \quad \Delta l^\alpha = A t_2^\alpha + B t_1^\alpha + C l^\alpha(x_0, v_0) + O^\alpha(\epsilon^3).$$

Wir erinnern daran (siehe (1, 33) und (1, 34)), daß t_2^α und t_1^α der 2-Richtung angehören, die die Kurve im Ausgangspunkt berührt. Wegen (2, 27) folgt durch Parallelführung von l^α um eine geschlossene Kurve der gleichen Art wie oben, im Falle eines Raumes konstanter Krümmung für den Differenzenvektor

$$(2, 29) \quad \Delta l^\alpha = a t_2^\alpha + b t_1^\alpha + O^\alpha(\epsilon^3).$$

Wir wollen nun nachweisen, daß die Gestalt (2, 28) bzw. (2, 29) des Differenzenvektors für Räume skalarer bzw. konstanter Krümmung charakteristisch ist.¹⁸

Aus (2, 28) und (1, 31) folgt, daß bei Vernachlässigung von Glieder der Ordnung $O(\delta^3)$

$$(2, 30) \quad R_{\beta\delta}^\alpha t_2^\beta t_1^\delta = A t_2^\alpha + B t_1^\alpha + C l^\alpha$$

für beliebige t_1^α und t_2^α gelten muß. Daraus ergibt sich aber, daß $R_{\beta\delta}^\alpha$ von der Gestalt

$$(2, 31) \quad R_{\beta\delta}^\alpha = \delta_\beta^\alpha a_\delta - \delta_\delta^\alpha a_\beta + p_{\beta\delta} l^\alpha$$

ist, wobei

$$(2, 32) \quad p_{\beta\delta} = -p_{\delta\beta}.$$

Durch die Verjüngung $\alpha = \beta$ folgt aus (2, 31) wegen (2, 15)

$$(2, 33) \quad R_\delta = (n-1)a_\delta + p_{\mu\delta} l^\mu.$$

Überschieben wir diese Gleichung mit l^δ , so folgt wegen (2, 14) und (2, 32)

$$(2, 34) \quad R = a_\delta l^\delta.$$

Wir können daher für den Vektor a_δ den Ansatz

$$(2, 35) \quad a_\delta = \psi_\delta + R l_\delta$$

machen, wobei

$$(2, 36) \quad \psi_\delta l^\delta = 0$$

sein muß. Aus (2, 31) folgt durch Herunterziehen des Index α

$$(2, 37) \quad R_{\beta\delta\epsilon} = g_{\beta\epsilon} a_\delta - g_{\delta\epsilon} a_\beta + p_{\beta\delta} l_\epsilon.$$

Wegen der schiefen Symmetrie des Affinors $R_{\beta\delta\gamma\epsilon}$ in den Zeigern γ, ϵ und aus (2, 3) folgt hieraus, daß

$$(2, 38) \quad R_{\beta\delta\epsilon} l^\epsilon = 0$$

ist. Überschieben wir daher (2, 37) mit l^ϵ , so ergibt sich hieraus

$$(2, 39) \quad p_{\beta\delta} = l_\delta a_\beta - l_\beta a_\delta.$$

¹⁸ Die Notwendigkeit dieser Bedingungen findet sich bereits bei L. BERWALD [2], No. 14.

Führen wir hier noch den Wert von α_δ aus (2, 35) ein, so erhalten wir

$$(2, 40) \quad p_{\beta\delta} = l_\delta \psi_\beta - l_\beta \psi_\delta.$$

Wegen (2, 35) und (2, 40) erhält man so aus (2, 31)

$$(2, 41) \quad R_{\beta\delta}^{\cdot\alpha} = \delta_\beta^\alpha (\psi_\delta + R l_\delta) - \delta_\delta^\alpha (\psi_\beta + R l_\beta) + (l_\delta \psi_\beta - l_\beta \psi_\delta) l^\alpha.$$

Für den Vektor ψ_δ ergibt sich durch die Verjüngung $\alpha \rightarrow \beta$

$$(2, 42) \quad \psi_\delta = \frac{1}{n-2} R_\delta - \frac{n-1}{n-2} R l_\delta.$$

Durch Überschiebung der Gleichung (2, 41) mit l^δ folgt wegen (2, 6) und (2, 36) die für den Finslerschen Raum skalarer Krümmung charakteristische Relation (2, 23). Damit haben wir folgenden Satz gewonnen:

SATZ 1. *Damit ein Finslerscher Raum von skalarer Krümmung sei, ist notwendig und hinreichend, daß bei Parallelführung des normierten Linienelementes l^α um eine auf einer zweidimensionalen Fläche (1, 23) gelegene geschlossene doppelpunktfreie Kurve (1, 24), der Differenzenvektor von Anfangs- und Endlage, falls von Größen der Ordnung $O(\epsilon^2)$ abgesehen wird, eine lineare Kombination von l^α (im Ausgangspunkte) und den beiden Vektoren t_1^α und t_2^α ist, die die Fläche (1, 23) im Ausgangspunkte berühren.*

Aus der Formel (2, 41) folgt noch eine weitere Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer Krümmung:

SATZ 2. *Ist ψ_α ein beliebiger kovarianter Vektor, für den $\psi_\alpha l^\alpha = 0$ gilt und ist $R(x, v)$ irgendein Skalar, dann ist der Finslersche Raum, dessen Affinor $R_{\beta\delta}^{\cdot\alpha}$ von der Gestalt (2, 41) ist, von skalarer Krümmung und das Krümmungsmaß ist durch $R(x, v)$ bestimmt.*

Wir betrachten jetzt den Fall, in dem der Differenzenvektor bei der fraglichen Parallelverschiebung in der durch Gleichung (2, 29) angegebenen Form darstellbar ist. Aus (1, 31) folgt dann

$$(2, 43) \quad R_{\beta\delta}^{\cdot\alpha} t_2^\beta t_1^\delta = a t_2^\alpha + b t_1^\alpha,$$

falls Glieder von der Größenordnung $O(\epsilon^3)$ vernachlässigt werden. Aus (2, 43) folgt nun, daß

$$(2, 44) \quad R_{\beta\delta}^{\cdot\alpha} = \delta_\beta^\alpha b_\delta - \delta_\delta^\alpha b_\beta$$

ist. Durch die Verjüngung $\beta \rightarrow \alpha$ und Überschiebung mit l^δ folgt dann wegen (2, 14) und (2, 15)

$$(2, 45) \quad b_\delta l^\delta = R.$$

Machen wir daher wie im vorangehenden Fall den Ansatz

$$(2, 46) \quad b_\delta = \varphi_\delta + R l_\delta$$

so muß

$$(2, 47) \quad \varphi_\delta l^\delta = 0$$

sein. Führen wir die Ausdrücke (2, 46) von b_δ in (2, 44) ein und ziehen dann den Index α herunter, so erhalten wir

$$(2, 48) \quad R_{\beta\delta\epsilon} = g_{\beta\epsilon}(\varphi_\delta + Rl_\delta) - g_{\delta\epsilon}(\varphi_\beta + Rl_\beta).$$

Überschieben wir diese Gleichung mit l^ϵ und l^δ , so folgt hieraus

$$(2, 49) \quad \varphi_\delta = 0$$

und daher wird (2, 46) zu

$$(2, 50) \quad b_\delta = Rl_\delta.$$

Wegen (2, 50) und (2, 47) besitzt der Affinor $R_{\beta\delta}$ gerade die für Räume konstanter Krümmung kennzeichnende Form (2, 27).

Damit haben wir nun folgendes nachgewiesen:

SATZ 3. *Damit ein Finslerscher Raum von konstanter Krümmung ist, ist notwendig und hinreichend, daß der Differenzenvektor, der sich bei Parallelführung um eine auf der Fläche (2, 23) gelegene geschlossene, doppelpunktfreie Kurve ergibt, bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung $O(\epsilon^2)$ der 2-Richtung angehört, die die Fläche (2, 23) im Ausgangspunkt berührt.*

Satz 3 können wir auch folgende Fassung geben:

SATZ 4. *Ist b_α ein beliebiger kovarianter Vektor, dann ist der Finslersche Raum, dessen Affinor $R_{\beta\delta}$ sich durch b_α mittels (2, 44) darstellen läßt, von konstanter Krümmung.*

(Eingegangen am 1. Oktober 1951.)

Literaturverzeichnis

- L. BERWALD [1] Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, *Math. Zeitschr.*, **25** (1926), S. 40—73.
- [2] Über Finslersche und Cartansche Geometrie, IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume von skalarer Krümmung, *Ann. of Math.*, **48** (1947), S. 755—781.
- E. BORTOLOTTI [1] Sulle geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo, *Ann. di Mat. Bologna*, **IV** 8, (1930), S. 53—101.
- E. CARTAN [1] *Les espaces de Finsler*, Actualités scientifiques et industrielles, 79 (Paris, 1934).
- H. TIETZE [1] Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen, *Math. Zeitschr.* **16** (1923), S. 308—317.
- O. VARGA [1] Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **1** (1949), S. 7—17.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ХАРАКТЕРИЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ФИНСЛЕРА СКАЛЯРНОЙ И ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

О. ВАРГА (Дебрецен)

(Р е з ю м е)

В настоящей работе характеризуются пространства Финслера постоянной скалярной кривизны с помощью параллельного перенесения нормированного линейного элемента вдоль замкнутой кривой без двойных точек. Если кривая лежит на двумерной поверхности F , а P служит исходным пунктом параллельного перенесения e^α , между тем как t_1^α и t_2^α суть два касательных вектора поверхности F в точке P , то при пренебрежении, определяемом соотношением (1, 29) имеют место теоремы 1 и 3, утверждение которых по сущности заключается в следующем:

Пространство имеет скалярную кривизну тогда и только тогда, если вектор, представляющий разность между исходным и окончательным положением l^α в P , принадлежит векторному пространству, определенному посредством t_1^α , t_2^α и l^α , кривизна же является постоянной тогда и только тогда, если этот вектор лежит даже и в векторном пространстве, порожденном векторами t_1^α и t_2^α .

ÜBER POLYNOME, DEREN NULLSTELLEN AUF EINEM KREIS LIEGEN

Von

GYULA SZ.-NAGY (Szeged), Mitglied der Akademie

1. Das Polarpolynom $P_{\xi}f(z)$ des Polynoms

$$(1) \quad f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)$$

in Bezug auf den Pol ξ , oder die *Derivierte* von $f(z)$ in Bezug auf den Pol ξ wird durch die Gleichung

$$(2) \quad P_{\xi}f(z) = nf(z) + (\xi - z)f'(z) = f(z) \sum_{k=1}^n \frac{\xi - a_k}{z - a_k}$$

definiert.¹ Bedeuten p_1, p_2, \dots, p_n beliebige positive Zahlen, so ist

$$(3) \quad g(x) = f(z) \sum_{k=1}^n p_k \frac{\xi - a_k}{z - a_k}$$

ein verallgemeinertes oder anisobares Polarpolynom von $f(z)$ mit den Gewichten p_1, p_2, \dots, p_n .² Das Polarpolynom (2) ist isobar.

I. Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n -ten Grades auf einem Kreis K (oder auf einer Geraden), so fallen die Nullstellen jedes Polarpolynoms von $f(z)$ in Bezug auf irgendeinen auf K liegenden Pol ξ auf dem Kreis K und sie trennen mit dem Pol ξ zusammen auf K die Nullstellen von $f(z)$. Bewegt sich der Pol auf K in einem Sinne, so bewegen sich die von den mehrfachen Nullstellen von $f(z)$ abweichenden Nullstellen des Polarpolynoms im entgegengesetzten Sinne.³

Beim Beweis dieses Satzes nehmen wir zuerst an, daß K die reelle Achse ist und daß $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ist. Die geschlossene reelle Achse wird

¹ E. LAGUERRE, *Oeuvres I*, S. 133—139. Vgl. G. PÓLYA und G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, I. S. 55—58.

² Vgl. Gy. SZ.-NAGY, Verallgemeinerung der Derivierten in der Geometrie der Polynome, *Acta Scient. Math. Szeged*, **13** (1950), S. 164—178.

³ Der Satz I wurde für isobare Polarpolynome von LAGUERRE (mit einer anderen Methode) bewiesen.

von den Punkten a_1, a_2, \dots, a_n in n Strecken, in die $n-1$ endlichen Strecken $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n)$

und in die unendliche Strecke $(a_n, a_1) = (a_n, +\infty) + (-\infty, a_1)$ geteilt.

Die Funktion

$$(4) \quad G(z) = \frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n p_k \frac{\zeta - a_k}{z - a_k}$$

ist im Innern jeder der n Strecken stetig. Am Anfang und am Ende haben die Werte von $G(z)$ dieselben bzw. entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Strecke den Pol ζ enthält bzw. nicht enthält. Daraus folgt, daß die Funktion $G(z)$ und damit das Polynom $g(z)$ $(n-1)$ -ten Grades auf der ζ enthaltenden Strecke keine Nullstelle, auf den übrigen $n-1$ Strecken genau je eine Nullstelle besitzt. Widrigenfalls hätte nämlich das Polynom $g(z)$ mehr als $n-1$ Nullstellen.

Ist z eine Nullstelle des Polynoms $g(z)$, so erhält man aus (4)

$$\zeta = z - \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{z - a_k}}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dz} &= \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{z - a_k}\right)^2 - \sum_{k=1}^n p_k \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{(z - a_k)^2}}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{z - a_k}\right)^2} = \\ &= - \left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{z - a_k}\right)^{-2} \sum_{1 \leq h < k \leq n} p_h p_k \left(\frac{1}{z - a_h} - \frac{1}{z - a_k}\right)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß ζ eine abnehmende Funktion von z ist. Bewegt sich also ζ auf der reellen Achse in einem Sinne, so bewegen sich die (von den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ verschiedenen) Nullstellen von $g(z)$ im entgegengesetzten Sinne.

Ist

$f(z) = (z - a_1)^{q_1} (z - a_2)^{q_2} \dots (z - a_v)^{q_v}$, $q_1 + q_2 + \dots + q_v = n$, $a_1 < a_2 < \dots < a_v$, so hat die Funktion (4) die Form

$$G(z) = \frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^v q_k p_k \frac{\zeta - a_k}{z - a_k}, \quad p_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, v.$$

Der Punkt a_k ist eine $(q_k - 1)$ -fache Nullstelle von $g(z)$. Dieses Polynom besitzt in den mehrfachen Nullstellen von $f(z)$ $\sum_{k=1}^v (q_k - 1) = n - v$ Nullstellen, auf derjenigen der Strecken $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{v-1}, a_v), (a_v, a_1)$, wo der Pol ζ liegt, keine Nullstelle, auf den übrigen $v - 1$ Strecken je eine Nullstelle. Die

letzten bewegen sich in zur Bewegungsrichtung von ζ entgegengesetztem Sinne, worauf durch die im erst betrachteten Falle gegebene Ableitung gefolgt werden kann.

Damit ist der Satz I für den Fall der reellen Achse bewiesen. Aus diesem speziellen Fall ergibt sich der Satz für einen Kreis durch eine lineare Transformation von z .

2. Bezeichnet z_0 eine (von den mehrfachen Nullstellen des Polynoms (1) abweichende) Nullstelle des (isobaren) Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$, so besteht die Gleichung

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\zeta - a_k}{z_0 - a_k} = \sum_{k=1}^n (\zeta z_0 a_k) = 0.$$

Dividiert man die Gleichung durch das Teilungsverhältnis $(\zeta z_0 a_s)$ ($1 \leq s \leq n$), so ergibt sich

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \frac{(\zeta z_0 a_k)}{(\zeta z_0 a_s)} = \sum_{k=1}^n (\zeta z_0 a_k a_s) = 0.$$

Liegen die Nullstellen a_k und der Pol ζ auf einem Kreis K , so liegt auch der Punkt z_0 auf K . Dann ist jedes Doppelverhältnis in der Summe von (6) reell. Die Punkte ζ und z_0 teilen den Kreis K in zwei Bogen $(\zeta z_0)_+$ und $(\zeta z_0)_-$. Während ein Punkt z von ζ ausgehend den einen Bogen beschreibt, nimmt der absolute Betrag des Doppelverhältnisses

$$(7) \quad DV = (\zeta z_0 z a_s)$$

von Null bis ∞ beständig zu. In den Punkten z des Kreisbogens $(\zeta z_0)_+$ bzw. $(\zeta z_0)_-$ ist das Vorzeichen von DV positiv bzw. negativ. Im Punkte $z = a_s$ ist $DV = 1$, a_s liegt also auf dem Bogen $(\zeta z_0)_+$.

Wir nehmen an, daß die Nullstellen von $f(z)$ auf K die Aufeinanderfolge a_1, a_2, \dots, a_n haben. Sie teilen K in n Kreisbogen

$$(8) \quad (a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_1),$$

unter denen einige verschwindende Länge haben können. Liegt der Pol ζ auf dem Bogen (a_n, a_1) , so besitzt das Polarpolynom $P_\zeta f(z)$ auf den übrigen (nicht ausgearteten) Kreisbogen je eine Nullstelle. Liegt die Nullstelle z_0 von $P_\zeta f(z)$ auf dem Bogen (a_p, a_{p-1}) ($1 \leq p < n$) und ist $s = p + 1$, so gibt es in der Summe von (6) p negative und $n - p$ positive Doppelverhältnisse und zwar diejenigen, für welche $k \leq p$ bzw. $k > p$ ist.

Aus der Aufeinanderfolge der Punkte a_k auf dem Bogen $(\zeta z_0)_-$ bzw. $(\zeta z_0)_+$ folgen die Ungleichungen

$$0 < -(\zeta z_0 a_1 a_{p+1}) \leq -(\zeta z_0 a_2 a_{p+1}) \leq \dots \leq -(\zeta z_0 a_p a_{p+1}),$$

bzw.

$$0 < (\zeta z_0 a_n a_{p-1}) \leq (\zeta z_0 a_{n-1} a_{p+1}) \leq \dots \leq (\zeta z_0 a_{p+1} a_{p+1}) = 1,$$

Ein Gleichheitszeichen besteht hier nur dann, wenn zwei aufeinanderfolgende Nullstellen des Polynoms $f(z)$ zusammenfallen.

Dann hat die Gleichung (6) die Form

$$\sum_{k=1}^p -(\zeta z_0 a_k a_{p+1}) = \sum_{k=p+1}^n (\zeta z_0 a_k a_{p+1}),$$

wo jedes Glied der linken und der rechten Seite positiv ist. Auf Grund der vorigen Ungleichungen ist

$$-p(\zeta z_0 a_p a_{p+1}) \geq 1 \quad \text{und} \quad -(\zeta z_0 a_p a_{p+1}) \leq n-p \leq n-1,$$

weil $-(\zeta z_0 a_p a_{p+1})$ bzw. $(\zeta z_0 a_{p+1} a_{p+1})$ das größte Glied der linken bzw. rechten Summe ist. Diese Ungleichungen lassen sich in der Form

$$(9) \quad -(a_p a_{p+1} z_0 \zeta) \leq p \leq p-1 \quad \text{und} \quad -(a_{p+1} a_p z_0 \zeta) \leq n-p \leq n-1$$

schreiben. Damit wurde ein Satz von LAGUERRE⁴ über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms mit lauter reellen Nullstellen und seine von mir gegebene Verschärfung⁵ verallgemeinert.

II. Liegen sämtliche Nullstellen $a, b (\neq a), c, \dots$ des Polynoms $f(z)$ n -ten Grades und der Pol ζ auf einem Kreis K , enthält ferner der Kreisbogen (a, b) von K weder den Pol ζ noch eine Nullstelle von $f(z)$ im Innern und sind $(aba'\zeta) = -(n-1)$, $(bab'\zeta) = -(n-1)$, so enthält der Teilbogen (a', b') von (a, b) eine Nullstelle des isobaren Polarpolynoms $P_{\zeta}f(z)$.

Enthält derjenige Kreisbogen (ζ, b) bzw. (ζ, a) von K , wo der Punkt a bzw. b liegt, im Innern p bzw. $n-p$ Nullstellen von $f(z)$ und sind $(aba''\zeta) = -(n-p)$, $(bab''\zeta) = -(n-p)$, so enthält auch der Teilbogen (a'', b'') von (a, b) eine Nullstelle des Polarpolynoms $P_{\zeta}f(z)$.

Aus diesem Satz folgt

III. Liegen sämtliche Nullstellen $a, b (\neq a), c, \dots$ eines Polynoms $f(z)$ und der Pol ζ auf einem Kreis K , enthält ferner der Bogen (ζ, b) von K im Innern den Punkt a , aber keine andere Nullstelle von $f(z)$, und ist $(ab\zeta\zeta') = -1$, so enthält der Teilbogen (a, ζ') von (ζ, b) — unabhängig vom Grad des Polynoms $f(z)$ — stets eine Nullstelle des Polarpolynoms $P_{\zeta}f(z)$.

Der Punkt ζ' läßt sich auf folgende Weise⁶ konstruieren: Ist r_1 der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Punkte a und b mit der Tangente des Kreises K im Punkt ζ , so ist ζ' der Berührungspunkt auf der von r_1 ausgehenden anderen Tangente des Kreises K . Durch entsprechende Wiederholungen dieser bekannten Konstruktion harmonischer Punkte auf einem Kreis lassen sich die Punkte a', b', a'', b'' des Satzes II konstruieren.

3. Im Falle $p = 1$ und $s = n$ erhält man bei der angenommenen Aufeinanderfolge der Punkte a_k und ζ auf K für die auf dem Kreisbogen (a_1, a_2)

⁴ E. CESÀRO, Solution d'une question de M. Laguerre, *Nouvelles Annales de Math.*, (3) 4 (1883), S. 328—330.

⁵ Gy. (J.) SZ.-NAGY, Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 18 (1918), S. 37—43.

⁶ E. CESÀRO—G. KOWALEWSKI, *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und Infinitesimalrechnung* (1904), S. 336.

liegende Nullstelle $z_1 (\neq z_0)$ des Polarpolynoms $P_{\zeta}f(z)$ aus der Gleichung (6) die Ungleichung

$$-(\zeta z_1 a_2 a_n) \geq n-1 \quad \text{oder} \quad -(a_n a_1 z_1 \zeta) \geq n-1,$$

weil dann

$$(\zeta z_1 a_1 a_n) < 0 \quad \text{und} \quad (\zeta z_1 a_2 a_n) \geq (\zeta z_1 a_3 a_n) \geq \dots \geq (\zeta z_1 a_n a_n) = 1$$

sind. Ebenso erhält man im Falle $p = n-1$ und $s = 1$ für die auf dem Bogen (a_{n-1}, a_n) liegende Nullstelle z_{n-1} des Polarpolynoms $P_{\zeta}f(z)$ die Ungleichung

$$(10) \quad -(a_1 a_n z_{n-1} \zeta) \geq n-1.$$

Damit wird ein anderer von mir gegebener Satz⁷ verallgemeinert.

IV. Liegen die Nullstellen $a, b (\neq a), c, \dots$ eines Polynoms $f(z)$ n -ten Grades und der Pol ζ auf einem Kreis K , enthält der Bogen (a, b) jede Nullstelle von $f(z)$, den Pol ζ aber nicht und sind $(baa^*\zeta) = -(n-1)$, $(abb^*\zeta) = -(n-1)$, so enthalten beide Teilbogen (a, a^*) und (b, b^*) des Kreisbogens (a, b) mindestens je eine Nullstelle des Polarpolynoms $P_{\zeta}f(z)$.

4. Ein Punkt $z (z \neq a, z \neq b)$ eines Kreisbogens (a, b) läßt sich durch das *Bogenverhältnis*

$$BV(abz) = \frac{(az)}{(bz)}$$

angeben, wo (az) bzw. (bz) die Länge des Teilbogens (a, z) bzw. (b, z) von (a, b) bezeichnet. Das Bogenverhältnis ist also eine positive reelle Zahl. Es gilt der folgende Hilfssatz:

Bezeichnet $BV(abz)$ bzw. (abz) das Bogenverhältnis bzw. das Teilungsverhältnis eines Punktes z von einem Kreisbogen (a, b) , der nicht größer ist, als ein Halbkreis, so ist entweder $1 < |(abz)| < BV(abz)$, oder $1 > |(abz)| > BV(abz)$, oder $1 = |(abz)| = BV(abz)$.

Dies folgt unmittelbar aus der bekannten Eigenschaft der Funktion

$$\frac{\sin x}{x},$$

daß sie im Intervall $(0, \pi)$ monoton abnimmt. Bezeichnen nämlich $2x_1$ und $2x_2$ die Zentriwinkel der Bogen (a, z) und (b, z) , so ist

$$BV(abz) = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{und} \quad |(abz)| = \frac{\sin x_1}{\sin x_2}.$$

Liegen also die Punkte a, b, z auf einem Halbkreis und ist $|(abz)| < 1$ bzw. $|(abz)| \geq 1$, so ist

$$BV(abz) \leq |(abz)| \quad \text{bzw.} \quad BV(abz) \geq |(abz)|.$$

⁷ Vgl. den Satz I in der Fußnote ⁵ zitierten Arbeit.

Aus der Ungleichung (10) erhält man im Falle $|(a, a_n \zeta)| \geq 1$ die Ungleichung

$$BV(a_1 a_n z_{n-1}) \geq n-1.$$

Diese Ungleichung läßt sich auf folgende Weise ausdrücken:

V. Die Nullstellen $a, b (\neq a), c, \dots$ eines Polynoms $f(z)$ n -ten Grades und der Pol ζ liegen auf einem Kreis K , der Bogen (a, b) von K sei nicht größer als ein Halbkreis und er enthalte den Pol ζ nicht. Wir teilen diesen Bogen (a, b) in n gleiche Teilbögen. Enthält der Bogen (a, b) jede Nullstelle des Polynoms $f(z)$ und liegt ζ nicht näher zu a als zu b , so enthält sein Teilbogen mit dem Endpunkt b mindestens eine Nullstelle des Polarpolynoms $P_\zeta f(z)$.

Hat ζ von a und b gleiche Entfernungen, so gilt die Behauptung des Satzes für die beiden äußersten Teilbögen von (a, b) .

5. Der Satz I läßt sich auf folgende Weise ergänzen:

VI. Werden die Nullstellen des Polynoms

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$$

auf einem Kreis K von den Nullstellen b_1, b_2, \dots, b_n des Polynoms $h(z)$ n -ten Grades getrennt, so ist das Polynom

$$\frac{h(z)}{z-b_h} \quad (1 \leq h \leq n)$$

zu einem (anisobaren) Polarpolynom von $f(z)$ in Bezug auf den Pol $\zeta = b_h$ proportional.

Es genügt offenbar diesen Satz für den Fall zu beweisen, in dem K der Einheitskreis $|z|=1$ und der Pol $\zeta = b_k = 1$ ist.

Die Transformation

$$z = \frac{x+i}{x-i}$$

führt die reelle Achse in den Einheitskreis und ihren unendlichfernen Punkt in den Punkt $z=1$ über. Dadurch wird das Polynom $f(z)$ bzw. $h(z)$ in ein Polynom $F(x)$ n -ten Grades bzw. in ein Polynom $H(x)$ $(n-1)$ -ten Grades überführt. Beide Polynome haben lauter reelle Nullstellen und die Nullstellen von $F(x)$ werden auf der reellen Achse von den Nullstellen des Polynoms $H(x)$ getrennt.

Auf Grund der Eigenschaften der Polynompaare mit auf der reellen Achse sich trennenden Nullstellen⁸ gibt es eine Darstellung von der Form

$$\frac{H(x)}{F(x)} = C \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x-\alpha_k}, \quad C \neq 0, \quad A_k > 0, \quad \alpha_k = \frac{\alpha_k + i}{\alpha_k - i} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

⁸ Vgl. Gy. SZ.-NAGY, Totalreelle Funktionen, *Acta Scient. Math. Szeged*, **12** A (1950), S. 1—10. Die in der Fußnote ¹ dieser Arbeit angeführte Literatur über Polynompaare mit auf der reellen Achse sich trennenden Nullstellen ist mit der folgenden Arbeit von P. MONTEL zu ergänzen: Sur les fonctions méromorphes limites de fonctions rationnelles à termes entrelacées, *Ann. Éc. Norm. (3)*, **50** (1933), S. 172—196.

Die inverse Transformation führt die Funktionen $F(x)$, $H(x)$, $x - a_k$ bzw.

$\frac{1}{x - a_k}$ in die Funktionen $f(z)$, $h(z)$,

$$i \frac{z+1}{z-1} - i \frac{a_k+1}{a_k-1} = -2i \frac{z-a_k}{(z-1)(a_k-1)} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{(z-1)i}{2} \frac{1-a_k}{z-a_k}$$

über. Daraus folgt, daß

$$\frac{h(z)}{f(z)} = -\frac{Ci}{2} z-1 \sum_{k=1}^n A_k \frac{1-a_k}{z-a_k} - c(z-1) \sum_{k=1}^n A_k \frac{1-a_k}{z-a_k}$$

und

$$\frac{h(z)}{z-1} = cf(z) \sum_{k=1}^n A_k \frac{1-a_k}{z-a_k} \equiv cg(z).$$

sind. Damit ist der Satz VI bewiesen, weil $g(z)$ ein Polarpolynom von $f(z)$ in Bezug auf den Pol $\xi = 1$ ist.

(Eingegangen am 27. April 1950.)

О МНОГОЧЛЕНАХ С КОРНЯМИ НА ОКРУЖНОСТИ

Д. С.-НАДЬ (Сегед)

(Резюме)

$$P_{\xi}f(z) = nf(z) + (\xi - z)f'(z) = f(z) \sum_{k=1}^n \frac{\xi - a_k}{z - a_k}$$

есть изобарный полярный многочлен с полюсом равным ξ , многочлена $f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$ а

$$g(z) = f(z) \sum_{k=1}^n p_k \frac{\xi - a_k}{z - a_k}, \quad p_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

есть его анизобарный полярный многочлен. Если корни $f(z)$ и полюс ξ лежат на какой-нибудь окружности K , то корни полярных многочленов $f(z)$ обоих типов также лежат на этой окружности и вместе с ξ разделяют корни многочлена. Если полюс ξ движется по окружности в каком-либо направлении K , то любой корень полярного многочлена, отличный от многократных корней многочлена $f(z)$ движется в противоположном направлении.

Настоящая работа обобщает теорему Лагерра о корнях производной многочлена, обладающего лишь действительными корнями, и некоторые относящиеся сюда результаты автора для изобарного полярного многочлена, если корни $f(z)$ и полюс ξ лежат на окружности K .

Следствием более общих теорем является следующая теорема:

Пусть корни многочлена $f(z)$ степени n есть a, b, c, \dots и эти корни, а также ξ лежат на K . Дуга (a, b) меньшая полуокружности, не содержит ξ . Разбиваем её на n равных частей. Если ξ не лежит к a ближе чем к b и дуга (a, b) содержит все корни $f(z)$, то последний субинтервал, оканчивающийся в точке b , содержит по крайней мере один корень многочлена $P_{\xi}f(z)$.

STUDY OF A STOCHASTIC PROCESS ARISING IN THE THEORY OF THE ELECTRON MULTIPLIER

By

L. JÁNOSSY (Budapest), member of the Academy

§ 1. The fluctuation of the electron cascade in an electron multiplier is a typical stochastic problem, it was dealt with by P. FARAGÓ and L. TAKÁCS [1] and independently by FRISCH [2]. The problem can be formulated as follows. An electron falling on one of the plates of a multiplier will give rise to a number of secondary electrons, the probability of giving rise to k electrons being $p(k)$. Each electron falls on the next plate and each gives rise to new secondaries independently of the others. The question arises as to the probability $p(N, \nu)$, that ν electrons arise out of a multiplier containing N plates. The distribution $p(N, \nu)$ can be determined by a recursion. We have

$$(1) \quad p(N, \nu) = \sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = \nu \\ k=0, 1, 2, \dots}} p(N-1, k) p(\nu_1) p(\nu_2) \dots p(\nu_k).$$

Indeed, each term in the above sum represents the probability that in the $N-1$ -st stage there are k electrons, these electrons giving rise respectively to $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ electrons. The sum of all these probabilities is the total probability of finding ν particles in the N th stage.

To make the recursion (1) complete, we have to postulate as an initial condition that the first plate receives exactly one electron. This can be expressed formally as

$$(2) \quad p(0, \nu) = \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \neq 1, \\ 1 & \text{if } \nu = 1. \end{cases}$$

§ 2. Equations (1) and (2) completely define the probabilities $p(N, \nu)$, provided $p(\nu)$ is given. Without specialising $p(\nu)$ we shall only assume that $0 < p(0) < 1$ and that both $\sum \nu p(\nu)$ and $\sum \nu^2 p(\nu)$ exist. The direct evaluation of $p(N, \nu)$ from (1) and (2) is, however, too cumbersome to be of practical use. The calculation can be greatly simplified by introducing generating func-

tions. We thus put

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{v=0}^N u^v p(N, v) = G_N(u) & (N=0, 1, 2, \dots), \\ \sum_{v=0}^{\infty} u^v p(v) = G(u). \end{cases}$$

From equations (2) and (3) we have

$$(4) \quad G_0(u) = u,$$

introducing (3) into (1) we find the well-known recursion

$$(5) \quad G_N(u) = G(G_{N-1}(u)).$$

In particular for $N=1$ with help of (4)

$$(6) \quad G_1(u) = G(u).$$

From equation (5) we obtain expressions for the semi-invariants. We have for the average number of electrons

$$p_N = \left(\frac{\partial}{\partial u} \ln G_N(u) \right)_{u=1} = p \cdot p_{N-1},$$

where $\left(\frac{\partial}{\partial u} \ln G(u) \right)_{u=1}$ is the average number of secondary electrons. Thus with help of (6) we have

$$(7) \quad p_N = p^N.$$

Similarly we get recursions for the higher moments. A simple calculation (see e. g. P. FARAGÓ and L. TAKÁCS [1]) gives for the dispersion

$$(8) \quad q_N = q \cdot p^{N-1} \frac{p^N - 1}{p - 1}$$

with

$$q_N = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln G_N(u) \right)_{u=1}, \quad q = q_1.$$

Similar expressions are obtained for higher moments. In the following we describe a practical method for determining $p(N, v)$ numerically, and give also a numerical example.

§ 3. The generating function $G_N(u)$ can be obtained by iterating $G(u)$ with help of (4) and (5). From expression (3) we have

$$p(N, v) = \frac{1}{v!} \left(\frac{\partial^v G_N(u)}{\partial u^v} \right)_{u=0};$$

for not too large values of v , $p(N, v)$ can be thus evaluated. However, for $p \gg 1$ the probabilities for $v \gg 1$ are mainly of interest and direct differentiation becomes too cumbersome to be useful. For large values of v it is

useful to replace (8) by a complex integral, namely

$$(9) \quad p(N, v) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=0} \frac{G_N(u)}{u^{v+1}} du,$$

the integration to be taken in the complex plane around $u = 0$. So as to evaluate the above integral numerically, we investigate the behaviour of $G_N(u)$ in the complex u -plane in some detail.

§ 4. We investigate the limiting functions

$$(10) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(u) = g(u).$$

For this purpose we have to find the roots u_k satisfying the equation

$$(11) \quad G(u) = u, \quad u = u_k.$$

For each root u_k we find from (5) and (11) that

$$G_N(u_k) = G_{N-1}(u_k),$$

and therefore

$$g(u_k) = u_k.$$

By virtue of G being a generating function, we have

$$G(1) = 1$$

and thus $u_1 = 1$ is a root of (11) and

$$g(1) = 1.$$

Further, if

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} G(u) \right)_{u=1} = p > 1,$$

then $G(u) < u$ in a certain interval $0 < b \leq u \leq c < 1$. (See Fig. 1.)

Further $G(0) = p(0) > 0$; therefore there is another interval $0 \leq u \leq a < b$ in which $G(u) > u$. As $G'(u) > 0$, for $0 < G(u) \leq 1$ the function increases monotonically in the interval 0 to 1 and there must be a root u_2

$$G(u_2) = u_2 \quad \text{with} \quad 0 < a \leq u_2 < b < 1,$$

there can be no other root in the interval 0 to 1.

Considering a u -value $u_2 < u < 1$, we have

$$u > G(u) > u_2.$$

Applying the function G to the above equation $N-1$ times in succession we have

$$G_{N-1}(u) > G_N(u) > u_2.$$

Thus the sequence $G_1(u), G_2(u), \dots$ is monotone and bounded and has therefore a limit. The limit must be u_2 itself. A similar proof holds for the interval $0 \leq u < u_2$. We conclude therefore that

$$g(u) = \begin{cases} u_2 & \text{for } 0 \leq u < 1, \\ 1 & \text{for } u = 1. \end{cases}$$

We extend this result to complex u -values with $|u| < 1$. As the coefficients $p(N, n)$ of the expansion of $G_N(u)$ are non-negative, we have

$$|G_N(u) - G_N(0)| \leq |G_N(|u|) - G_N(0)|,$$

provided $|u| < 1$. The right hand expression converges towards zero for $N \rightarrow \infty$, therefore

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(0) = u_2.$$

Thus we have

$$(12) \quad \begin{cases} g(u) = u_2 & \text{for } |u| < 1, \\ g(u) = 1 & \text{for } u = 1. \end{cases}$$

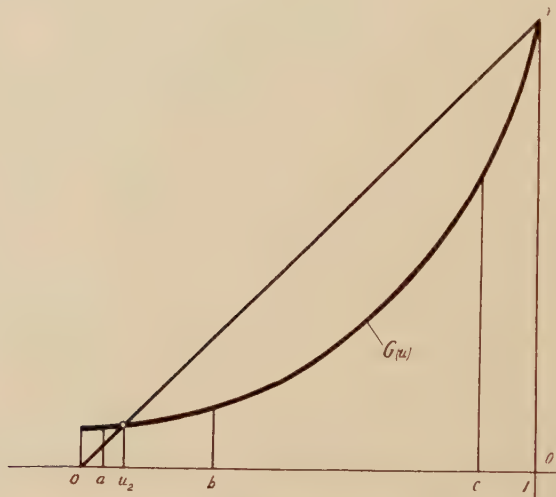


Fig. 1

From equation (12) incidentally follows the interesting result that the equation

$$G(u) = u$$

has only one root in $|u| < 1$, and this one is real and positive, where we have to assume of $G(u)$ only that the coefficients of the expansion of $G(u)$ are non-negative, $G(0) > 0$, $G(1) = 1$ and the radius of convergence of the expansion of $G(u)$ around the origin at least equals one.

Indeed, if there existed a root u_3 ,

$$u_3 \neq 1, u_2, \quad |u_3| < 1,$$

then the iteration at this point would give

$$g(u_3) = u_3,$$

in contradiction to (12).

This incidental result can also be proved directly by purely algebraic means as was pointed out by A. RÉNYI.

§ 5. We proceed now to discuss and to evaluate the integral (9). As $G(u)$ is regular for $|u| \leq 1$, the integration can be carried out along a circle with radius $\varrho \leq 1$. We have thus

$$(13) \quad p(N, \nu) = \frac{1}{2\pi\varrho^\nu} \int_0^{2\pi} \exp(-i\nu\varphi + \ln G_N(\varrho e^{i\varphi})) d\varphi.$$

In the limiting case $N \rightarrow \infty$ we have thus with help of (12)

$$(14) \quad \pi(\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} p(N, \nu) = \begin{cases} u_2 & \text{for } \nu = 0, \\ 0 & \text{for } 0 < \nu < \infty. \end{cases}$$

Thus all the probabilities, except for no electron to emerge, vanish in the limiting case. This result is easily understandable. The electron avalanche may be brought to a stop at any stage, and once brought to a stop, it cannot start again. Therefore there is a non-vanishing probability for this to happen, however large the number of stages. If on the other hand the avalanche develops, then the resulting numbers of particles are scattered over a wide interval and any particular number of electrons has an increasingly small probability for being realised.

The $p(N, \nu)$ values for finite but large N can be evaluated by the saddle point method. For moderately large values of N one finds that $G_N(u) \approx u_2$, except in the immediate neighbourhood of $u = 1$. Therefore choosing $\varrho \sim 1$ the main part of the integral (13) arises from the part near the real axis. We may choose ϱ such that for $\varphi = 1$ the integrand has a maximum, and then we may approximate the integrand by a Gauss function. We find thus that ϱ must be chosen so as to satisfy the following condition

$$(15) \quad \nu = \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \ln G_N(\varrho);$$

for the approximate value of the integral we find

$$(16) \quad p(N, \nu) = \frac{G_N(\varrho)}{\varrho^{\nu+1} \sqrt{2\pi \left(\frac{d^2(\ln G_N(\varrho))}{d\varrho^2} + \frac{\nu}{\varrho^2} \right)}}.$$

Equations (15) and (16) give a parameter representation of $p(N, \nu)$ with ϱ as independent parameter.

For $\varrho = 1$ we find in this way with help of (15)

$$\nu = p^{\setminus}$$

and with help of (8)

$$p(N, p^{\setminus}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(q_N + p_N)}}.$$

From equation (15) we see that $\nu \leq p_N$ for $\varrho \leq 1$; thus the saddles inside the unit circle define the distribution $p(N, \nu)$ up to the average value. For $\nu > p_N$ we get a saddle only then if $G_N(\varrho)$ converges for certain values $\varrho > 1$. If the radius of convergence of $G(\varrho)$ and thus of $G_N(\varrho)$ is equal to R , then the largest ν value for which a saddle can be found is

$$\nu_{\max} = \limsup_{\varrho=R} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \ln G_N(\varrho).$$

ν_{\max} may be infinite, then saddles can be found for any value of ν . Whether the saddle point integration is justified outside the circle $\varrho=1$ even if $G(\varrho)$ converges has to be investigated separately in each individual case.

§ 6. We see from (15) and (16) that the $p(N, \nu)$'s can be calculated if $G_N(u)$ and its first and second derivatives are known. These can all be calculated successively putting $N=1, 2, \dots$. The calculation of G_N and its derivatives can, however, be much simplified as follows. Starting with an u -value very near to $u=1$ we can obtain by successive application of the function G the following set of values. Put $u=1-h$; we have successively

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1(1-h) = 1-h_1 \\ G_2(1-h) = G(1-h_1) = 1-h_2 \\ G_3(1-h) = G(1-h_2) = 1-h_3 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array} \right.$$

The $G_N(1-h)$ values remain close to unity for a number of steps, but suddenly they run away and finally they converge towards u_2 . From the definition of $G_N(u)$ we have

$$G_{N+k}(u) = G_N(G_k(u)).$$

Thus once the expressions (17) are tabulated numerically we can read off from this table $G_N(u)$ in the following parametric representation:

$$(18) \quad G_N(u) = G_{N+k}(1-h), \quad u = G_k(1-h).$$

The latter representation can be much improved by extending the definition of $G_k(1-h)$ to non-integer values of k . This can be done particularly easily, if $G(u)$ can be expanded in a power series around $u=1$, i. e. if the radius of convergence of $G(u)$ is larger than unity. In this case we have

$$G(1-h) = 1 - ph + \frac{1}{2} Q h^2 - + \dots$$

Carrying out the iteration n times, we find as the result of a simple calculation

$$G_n(1-h) = 1 - p^n h + \frac{1}{2} Q \frac{p^{2n} - p^n}{p^2 - p} h^2 - + \dots;$$

the latter series can now be taken as the *definition* of $G_n(1-h)$ for non-integer n in the interval $0 \leq n < 1$; for larger suffixes we may put $G_{n+k}(1-h)$

TABLE I
 $h = 2,35785 \cdot 10^{-7}$

n	$G_n(1-h)$	$\frac{\partial G_n(1-h)}{\partial n}$	$G_n(1+h)$	$\frac{\partial G_n(1+h)}{\partial n}$
5,0	0,9993	0,0012	1,0007	0,0012
5,2	0,9990	0,0016	1,0010	0,0016
5,4	0,9986	0,0023	1,0014	0,0023
5,6	0,9981	0,0031	1,0019	0,0031
5,8	0,9973	0,0043	1,0027	0,0043
6,0	0,9963	0,0059	1,0037	0,0060
6,2	0,9949	0,0081	1,0051	0,0082
6,4	0,9930	0,0112	1,0070	0,0114
6,6	0,9904	0,0154	1,0097	0,0157
6,8	0,9868	0,0211	1,0135	0,0219
7,0	0,9818	0,0290	1,0186	0,0303
7,2	0,9750	0,0396	1,0258	0,0422
7,4	0,9657	0,0540	1,0358	0,0589
7,6	0,9531	0,0733	1,0499	0,0826
7,8	0,9359	0,0989	1,0696	0,1168
8,0	0,9130	0,1323	1,0976	0,1663
8,2	0,8824	0,1749	1,1378	0,2398
8,4	0,8424	0,2276	1,1963	0,3517
8,6	0,7908	0,2900	1,2831	0,5285
8,8	0,7259	0,3591	1,4173	0,8227
9,0	0,6472	0,4281	1,6294	1,3410
9,2	0,5555	0,4856	1,9917	2,3361
9,4	0,4547	0,5170	2,6681	4,4319
9,6	0,3513	0,5086	4,1195	8,9592
9,8	0,2540	0,4555	8,0150	
10,0	0,1713	0,3666	23,2646	
10,2	0,1083	0,2634	142,3725	
10,4	0,0654	0,1697	4190,2500	
10,6	0,0390	0,0996		
10,8	0,0240	0,0547		
11,0	0,0159	0,0290		
11,2	0,0116	0,0152		
11,4	0,0093	0,0079		
11,6	0,0082	0,0040		
11,8	0,0076	0,0021		
12,0	0,0073	0,0011		
12,2	0,0071	0,0006		
12,4	0,0071	0,0003		
12,6	0,0070	0,0001		
12,8	0,0070			
13,0	0,0070			

The above functions can for $n < 5$ be obtained by the following approximate formulae with at least four figure accuracy:

$$G_n(1 \pm h) \sim 1 \pm 2,35785 \cdot 10^{-7} \cdot 5^n$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial n}(1 \pm h) \sim 3,79481 \cdot 10^{-7} \cdot 5^n$$

TABLE II

n	$G_{10}(u)$	$\frac{\partial G_{10}(u)}{\partial u} \cdot 5^{-10}$	$\frac{\partial^2 G_{10}(u)}{\partial u^2} \cdot 5^{-20}$	$G_{10}(v)$	$\frac{\partial G_{10}(v)}{\partial v} \cdot 5^{-10}$	$\frac{\partial^2 G_{10}(v)}{\partial v^2} \cdot 5^{-20}$
	$u \sim 1 - h \cdot 5^{n-10}$			$v \sim 1 + h \cdot 5^{n-10}$		
5,0	0,9993			1,0007		
5,2	0,9990	0,9992		1,0010		
5,4	0,9986	0,9996		1,0014		
5,6	0,9981	0,9980		1,0019	1,0010	
5,8	0,9973	0,9966		1,0027	1,0030	
6,0	0,9963	0,9971		1,0037	1,0042	
6,2	0,9949	0,9936		1,0051	1,0056	
6,4	0,9930	0,9914		1,0070	1,0079	
6,6	0,9904	0,9876		1,0097	1,0109	
6,8	0,9868	0,9837		1,0135	1,0167	
7,0	0,9818	0,9770		1,0186	1,0229	
7,2	0,9750	0,9688		1,0258	1,0316	
7,4	0,9657	0,9571	0,5491	1,0358	1,0438	
7,6	0,9531	0,9415	0,5340	1,0499	1,0610	
7,8	0,9359	0,9205	0,5195	1,0696	1,0870	
8,0	0,9130	0,8924	0,5031	1,0976	1,1219	0,6455
8,2	0,8824	0,8551	0,4785	1,1378	1,1725	0,6811
8,4	0,8424	0,8067	0,4469	1,1963	1,2465	0,7270
8,6	0,7908	0,7449	0,4062	1,2831	1,3573	0,8101
8,8	0,7259	0,6685	0,3596	1,4173	1,5315	0,9209
9,0	0,6472	0,5776	0,3031	1,6294	1,8093	1,0975
9,2	0,5555	0,4749	0,2406	1,9917	2,2844	1,4230
9,4	0,4547	0,3664	0,1769	2,6681	3,1411	
9,6	0,3513	0,2613	0,1182	4,1195	4,6022	
9,8	0,2540	0,1696	0,0704	8,0150		
10,0	0,1713	0,0989	0,0366	23,2646		
10,2	0,1083	0,0515	0,0165	142,3725		
10,4	0,0654	0,0241	0,0064	4190,2500		
10,6	0,0390	0,0102	0,0022			
10,8	0,0240	0,0041	0,0007			
11,0	0,0159	0,0016				
11,2	0,0116	0,0010				
11,4	0,0093	0,0002				
11,6	0,0082	0,0001				
11,8	0,0076					
12,0	0,0073					
12,2	0,0071					
12,4	0,0071					
12,6	0,0070					
12,8						

For h see Table I.

$-G_k(G_n(1-h))$ and thus we define $G_n(1-h)$ for arbitrary non-negative values of n .

Regarding now k as a continuous parameter, we may differentiate (18) with respect to k and obtain thus

$$\frac{\partial G_N(u)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dk} = \frac{\partial G_{N+k}(1-h)}{\partial k} \cdot \frac{du}{dk} = \frac{\partial G_k(1-h)}{\partial k}.$$

Thus

$$(19) \quad \frac{\partial G_N(u)}{\partial u} = \frac{\partial G_{N+k}(1-h)}{\partial k} = \frac{\partial G_k(1-h)}{\partial k}, \quad u = G_k(1-h).$$

Similarly

$$(20) \quad \frac{\partial^2 G_N(u)}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial G_{N+k}(u)}{\partial u} \right) = \frac{\partial G_k(u)}{\partial u} \Big|_{k=0}.$$

The equations (19) and (20) can be used with great advantage for actual numerical computation. We have to tabulate for this purpose $G_n(1-h)$ for sufficiently small steps of n and evaluate numerically the derivatives into n .

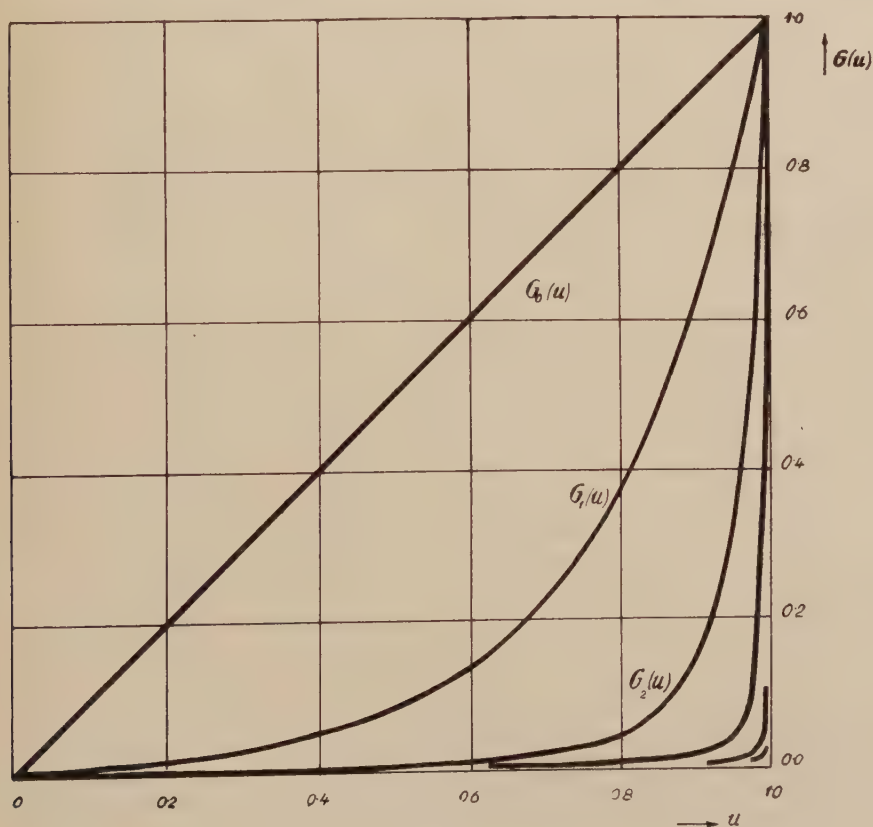


Fig. 2

Dividing suitable pairs of derivatives we obtain with help of (19) the parameter representation of $\frac{\partial G_N(u)}{\partial u}$, and repeating the procedure we obtain the second derivative.

Starting a sequence with $u = 1 + h$, $G_N(u)$ and its derivatives for $u = 1$ can be tabulated in a similar way.

The process of defining $G_n(u)$ for non-integer n -values is of great practical use; the significance of this procedure will be dealt with in a subsequent paper.

§ 7. As a numerical example, we consider the case of the Poisson distribution. Thus we assume

$$(21) \quad p(k) = e^{-p} \frac{p^k}{k!}$$

and

$$(22) \quad G(u) = e^{p(u-1)}.$$

Putting further $p = 5$, we find

$$u_2 = 0,006977.$$

Further putting $h = p^{-10}$, we obtained the tables to be found on pp. 171—172. With help of (18) we can read off say $G_{10}(u)$ for various u -values from this table, in this way we obtain Table II first column. With help of (19) and (20) we get $G'_{10}(u)$ and $G''_{10}(u)$ (see also Table II). From Table I we can also read off $G_N(u)$ for various values of N ; a family of curves thus obtained is shown in Fig. 2. Finally we have evaluated $p(10, r)$ as shown in Fig. 3.

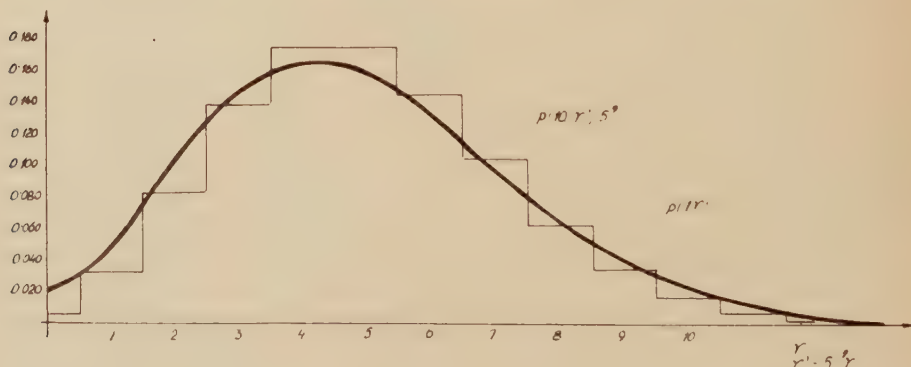


Fig. 3

We have also plotted the original Poisson distribution in Fig. 3. The two distributions are remarkably similar. As a check of the procedure we have evaluated by numerical integration $\sum p(r)$, $\sum rp(r)$ and $\sum (r - \bar{r})^2 p(r)$ from the values shown in Fig. 3 the results are shown below.

	$\sum p(r)$	$\frac{1}{p^{10}} \sum r p(r)$	$\frac{1}{p^{20}} \sum (r-r')^2 p(r)$
numerical integration	1,029	1,033	0,256
exact	1	1	0,25

The values for the moments obtained by numerical integration do not differ from the exact values by more than can be explained by the inaccuracy of the numerical integration. Thus the error involved by the application of the saddle point method cannot be more serious, but it is probably of the same order of magnitude.

The distribution shown in Fig. 3 does not agree with the distribution given by DALLOS [3] for the pulse size distribution of one electron multiplier.

This seems to suggest that the distribution found by DALLOS cannot be built up of Poisson distributions.

§ 8. The use of the saddle point integration for $u = 1$ could be avoided by evaluating $G_N(u)$ for $u = 1$ along the unit circle and evaluating (13) by numerical integration. This procedure would have to be adopted anyhow, if $G(u)$ did not converge for $u = 1$. But even if $G(u)$ converges, the numerical integration has the disadvantage that the integrand is oscillating along the path of integration. The value of the integral thus depends on the difference between the positive and the negative sections. The saddle point method avoids this difficulty. — Whether the saddle point integration is justified for $u = 1$ depends on whether a return path completing the integration across the saddle can be found so that the integral along this path is negligibly small. This seems to be so for the example considered above and therefore it seems that we were justified in our procedure. However, the function $G_N(u)$ for complex u is exceedingly complicated and therefore we postpone its detailed discussion to a later occasion.

I am indebted to my wife LEONIE for having carried out the numerical computations in the above article.

(Received 16 July 1951)

References

- [1] P. FARAGÓ and L. TAKÁCS, *Hung. Acta Phys.*, I, 6 (1949).
- [2] O. FRISCH (personal communication).
- [3] L. DALLOS, *Acta Phys. Hung.*, 1, 56 (1951).

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕОРИИ
ЭЛЕКТРОНМУЛТИПЛЕРА

Л. ЯНОШИ (Будапешт)

(Р е з ю м е)

Распространение лавины электронов, возникающей в электронмультиплере, является типичным стохастическим процессом. Настоящая статья занимается изучением таких процессов. Даётся метод численного определения функции распределения лавины. В качестве примера численно вычисляется случай, состоящий из десяти шагов.

ON THE GENERALIZATION OF LAPLACE TRANSFORM IN PROBABILITY THEORY

By

L. JÁNOSSY (Budapest), member of the Academy

§ 1. The Laplace transformation is used with great advantage in some probability problems. In the following we show that the well known methods involving this transformation represent a special case of a more general method.

The Laplace transformation is used for the determination of the distribution resulting from the superposition of independent probability distributions. Consider k distributions defined by densities $a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)$. We shall suppose $a(x) = 0$ for $x < 0$, although this assumption could easily be dispensed with. We determine the distribution $A_k(x)$ which gives the probability that simultaneously the k single distributions give such x -values x_1, x_2, \dots, x_k that

$$(1) \quad X \leq x_1 + x_2 + \dots + x_k < X + dX.$$

The distribution $A_k(x)$ is thus given by

$$(2) \quad A_k(X) dX = \int_{X-x_1-x_2-\dots-x_k}^X \dots \int_{X-x_1-x_2-\dots-x_k}^X a_1(x_1) a_2(x_2) \dots a_k(x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

The Laplace transform of the above integral is easily evaluated. One finds

$$(3) \quad L_{A_k}(\lambda) = L_{a_1}(\lambda) L_{a_2}(\lambda) \dots L_{a_k}(\lambda)$$

with

$$(4) \quad L_{A_k}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} A_k(x) dx, \quad L_{a_i}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} a_i(x) dx$$

($i = 1, 2, \dots, k$). The above relation becomes particularly simple if we put $a_1(x) = a_2(x) = \dots = a_k(x)$. In this case writing $L_{a_1}(\lambda) = L_1(\lambda)$ and $L_{a_k}(\lambda) = L_k(\lambda)$, we have simply

$$(5) \quad L_k(\lambda) = (L_1(\lambda))^k.$$

From (5) we get for the first and second semi-invariants:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L_k(\lambda) \right)_{\lambda=0} = kA, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L_k(\lambda) \right)_{\lambda=0} = kB$$

where

$$A = -L_1'(0) = -\int_0^t x a_1(x) dx, \quad B = L_1''(0) = -\int_0^t (x-A)^2 a_1(x) dx.$$

Thus the average value and the scatter of the k -fold distribution is exactly k times that of the single distribution. The reverse transform of (3) can be written

$$(6) \quad A_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0-i\infty}^{\lambda_0+i\infty} e^{\lambda x} (L_1(\lambda))^k d\lambda.$$

For sufficiently large values of k the asymptotic form of (6) is

$$A_k(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi k B}} e^{-(x-kA)^2/2kB}$$

provided $x-kA$ is not too large. Thus with help of the Laplace transform A_k can be determined both for moderate values of k and in the asymptotic case of $k \gg 1$.

Equations (5) and (6) admit a generalization. $A_k(x)$ is the resulting distribution arising from the superposition of exactly k events. Often, however, the number of events itself is subject to a distribution. Supposing $p_k, k = 0, 1, 2, \dots$, to be the probability for exactly k events to take place. Then the final distribution becomes a superposition of the A_k 's, namely

$$A(x) = \sum p_k A_k(x).$$

The transform $L(\lambda)$ of $A(x)$ can thus be written

$$(7) \quad L(\lambda) = f(L_1(\lambda)) \quad \text{when} \quad f(u) = \sum p_k u^k;$$

thus $f(u)$ is the generator function of the p_k -distribution, and the generalized inverse is written as

$$(8) \quad A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0-i\infty}^{\lambda_0+i\infty} e^{\lambda x} f(L_1(\lambda)) d\lambda.$$

An important special case is that where the numbers of events show a Poisson distribution, i. e.

$$p_k = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!} \quad \text{and} \quad f(u) = e^{\rho(u-1)}.$$

Thus

$$L_p(\lambda) = e^{\rho(L_1(\lambda)-1)}$$

and the semi-invariants, expressing average value and scatter of the chain can be written as

$$-\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L_p(\lambda)\right)_{\lambda=0} = \rho A, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L_p(\lambda)\right)_{\lambda=0} = \rho(B + A^2).$$

The inverse transform itself can be written as

$$(9) \quad A_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0-i\infty}^{\lambda_0+i\infty} e^{\lambda x + \rho(L_1(\lambda)-1)} d\lambda.$$

The latter distribution is again asymptotically normal for $p \rightarrow \infty$. One finds in the usual way

$$(10) \quad A_p(x) \sim \frac{e^{(x - pA)^2/2(B+A^2)p}}{\sqrt{2\pi(B+A^2)p}}.$$

Thus the scatter is larger than the scatter of one term multiplied by the average number of terms.

§ 2. The latter considerations can be further generalized as follows. Consider a stationary Markoff chain of k terms. $a(x, y)$ should be the probability density that in the course of one event a change $x \rightarrow y$ takes place. The probability of a change $X \rightarrow Y$ in k steps can thus be written

$$(11) \quad A_k(X, Y) = \int \cdots \int a(X, x_1) a(x_1, x_2) \cdots a(x_{k-1}, Y) dx_1 dx_2 \cdots dx_{k-1}.$$

In the special case when

$$(12) \quad a(x, y) = a(x - y)$$

(11) reduces to (2) ($a_1 = a_2 = \cdots = a$). In the latter case the integral can be evaluated by the Laplace transform.

On the other hand, if $a(x, y)$ is not of the special type (12), then the Laplace transform of (11) is of no advantage. (11) can, however, be simplified as follows. Consider $a(x, y)$ as the kernel of an integral equation of the second kind

$$(13) \quad \varphi_s(y) - s \int \varphi_s(x) a(x, y) dx = 0,$$

or of the conjugate equation

$$(14) \quad \psi_s(x) - s \int \psi_s(y) a(x, y) dy = 0.$$

The eigenfunctions of (13) or (14) are suitable to be used for a "generalized Laplace transformation". Indeed let us write

$$(15) \quad \int \varphi_s(X) A_k(X, Y) dX = \Phi_k(s, Y)$$

or

$$(16) \quad \int \psi_s(Y) A_k(X, Y) dY = \Psi_k(s, X),$$

then we find with help of (11), (13) and (14)

$$(17) \quad \Phi_k(s, Y) = s^{-k} \varphi_s(Y), \quad \Psi_k(s, X) = s^{-k} \psi_s(X).$$

Equation (17) is reminiscent of (5). The analogy becomes even more striking if we make use of the orthogonality relation between the φ 's and ψ 's, namely

$$(18) \quad \int \varphi_s(x) \psi_t(x) dx = 0, \quad \text{if } s \neq t,$$

and if we assume, at least for the moment, that the following normalization may be imposed

$$(19) \quad \int \varphi_s(x) \psi_s(x) dx = 1.$$

We have from (17), (18) and (19)

$$(20) \quad \Phi_k(s) = s^{-k} \quad \text{with} \quad \Phi_k(s) = \iint \varphi_s(X) \psi_s(Y) A_k(X, Y) dX dY.$$

Thus the transformed distribution of the chain of k terms appears in a simple form (1's in the general case corresponds to $L_1(\lambda)$ in the special case).

If we were to deal with chains of a fluctuating number of terms, p_k being again the probability of a chain having exactly k terms, then we have with help of (18) instead of (17) or of (20)

$$(21) \quad \Phi(s, Y) = \varphi_s(Y) f\left(\frac{1}{s}\right), \quad \Psi(s, X) = \psi_s(X) f\left(\frac{1}{s}\right)$$

and

$$(22) \quad \Phi(s) = f\left(\frac{1}{s}\right).$$

(Again we have to replace $f\left(\frac{1}{s}\right)$ by $f(L_1(\lambda))$ to arrive at the special case of the Laplace transformation.) So as to complete the analogy we have to find the reverse transform of the generalized transformation. We write down (21) explicitly (assuming $f(s) \neq 0$)

$$(23) \quad \varphi_s(Y) - \frac{1}{f\left(\frac{1}{s}\right)} \varphi_s(X) A(X, Y) dX = 0,$$

or

$$\psi_s(X) - \frac{1}{f\left(\frac{1}{s}\right)} \int \psi_s(Y) A(X, Y) dY = 0.$$

Comparing (23) with (15) and (16), we see that $A(X, Y)$ is a kernel which possesses the same eigenfunctions as $a(x, y)$ but the eigenvalues s have to be replaced by $1/f\left(\frac{1}{s}\right)$.

Now a wide class of kernels can be developed from their complete set of eigenfunctions as follows:

$$(24) \quad a(x, y) = \sum_s \frac{\psi_s(x) \varphi_s(y)}{s}.$$

The sum has to be extended over all eigenvalues s ; in case of a partly or wholly continuous spectrum it has to be replaced by a suitable integration.

Postulating (24), we see immediately that

$$(25) \quad A(X, Y) = \sum \psi_s(X) \varphi_s(Y) f\left(\frac{1}{s}\right),$$

provided (25) converges. Indeed, introducing (25) into (23) we get identities, but (25) can also be constructed introducing (24) into (11) and making use of the orthogonality relations.

In particular for a chain of exactly k terms we have

$$(26) \quad A_k(x, y) = \sum_s \frac{\psi_s(x) \varphi_s(y)}{s^k}.$$

So as to give (26) the form of an inverse transform we introduce (17) into (26) and find

$$(26a) \quad A_k(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) \psi_k(s, X).$$

X can be regarded as a fixed parameter and (26a) shows how to calculate the function $A_k(X, Y)$ from its transform $\psi_k(s, X)$. The generalized inverse transforms corresponding to (6), (8) and (9) can thus be written as

$$A_k(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) \frac{1}{s^k} \psi_s(X) \quad \text{and} \quad A(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) f\left(\frac{1}{s}\right) \psi_s(X),$$

and if the number of terms of the chain show a Poisson distribution, we have

$$A_p(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) e^{p\left(\frac{1}{s} - 1\right)} \psi_s(X).$$

The analogy between the above equations and (6), (8) and (9) has to be understood in such a way that

$$\sum_s \leftarrow \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty}, \quad \varphi_s(Y) \leftarrow e^{p\lambda},$$

$f\left(\frac{1}{s}\right) \leftarrow f(L_1(\lambda))$ and $\psi_s(X)$ is a weight factor caused by the fact that an integration into λ is now replaced by a sum over s .

Equation (26) can be used to obtain the asymptotic distribution for $k \rightarrow \infty$, as can be seen in the following manner. Equation (14) has always one trivial solution, namely $s = 1$, $\psi_s(y) \equiv 1$; indeed

$$(27) \quad \int a(x, y) dy \equiv 1$$

is simply the usual normalization condition for the density $a(x, y)$. Further $s = 1$ is the absolute smallest eigenvalue as can be shown in the following manner¹ provided the eigenfunctions can be assumed to be bounded.

Suppose $|\psi_s(x)| \leq M$, equal sign standing for $x = x_0$. From (14) we have

$$|\psi_s(x)| \leq |s| M = |s| |\psi_s(x_0)|.$$

As the latter has to stand for $x = x_0$, we have $|s| \geq 1$. Thus (14) has no eigenvalue absolutely smaller than $s = 1$. If there exists a smallest eigenvalue, then it is necessarily $s = 1$. According to (24) this is also the smallest eigenvalue of (13). Equation (25) can thus be written (note that $f(1) = 1$ for every generating function)

$$A(X, Y) = \varphi_1(Y) + \sum_{s \neq 1} \psi_s(X) \varphi_s(Y) f\left(\frac{1}{s}\right);$$

¹ I am indebted to A. RÉNYI for this proof; similar proofs are used in the case of discrete Markoff chains.

in particular if $f(s) = s^k$.

$$A_k(X, Y) = \varphi_1(Y) + \sum_{|s| > 1} \frac{\psi_s(X) \varphi_s(Y)}{s^k}.$$

If the eigenvalue $s = 1$ is an isolated one, then with increasing k the sum vanishes and we have

$$(28) \quad A_k(X, Y) \rightarrow \varphi_1(Y) \quad \text{for } k \rightarrow \infty.$$

Thus the asymptotic distribution is the eigenfunction of (13) corresponding to the smallest eigenvalue. If, however, $s = 1$ is not isolated, but is the boundary of a continuous band of eigenvalues, then the asymptotic value is not necessarily given by the eigenfunction $\varphi_1(y)$.

§ 3. We show now in detail how the Laplace transform arises as a special case.

The Laplace transformation is useful if the kernel has the form given by (12), i. e. if the kernel depends only on the difference of the variables. In this special case (13) can be written as

$$(29) \quad \varphi_s(y) = s \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s(x) a(x-y) dx,$$

$$(30) \quad \psi_s(x) = s \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(y) a(x-y) dy.$$

The above equations are fulfilled in a formal manner by

$$(31) \quad \varphi_s(y) = e^{\lambda y}, \quad \psi_s(x) = e^{-\lambda x}, \quad 1/s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda z} a(z) dz.$$

If we restrict ourselves to bounded eigenfunctions, then we have to put λ purely imaginary. Thus restricting ourselves to a function $a(z) = 0$ for $z > 0$, we have

$$(32) \quad \varphi_s(y) = e^{i\lambda y}, \quad \psi_s(x) = e^{i\lambda x}, \quad s = 1/L_1(i\lambda).$$

1. Introducing (32) into the various expressions we see clearly the connections which have already been pointed out as suggestive analogies. In detail we have $L_1(0) = 1$ and since $a(z) = 0$, this is the maximum value of $L_1(i\lambda)$ and also of $1/s$, thus $\varphi_1(x) = 1$ and $s = 1$ is the smallest eigenvalue.

2. Introducing (32) into (26a) we obtain (apart from normalization) the reverse Laplace transformation.

3. Equations (24), (25), (26) are identical with the reverse transforms for $a(x)$, $A(x)$ and $A_k(\lambda)$.

In the case of the Laplace transformation asymptotic distribution for $k \rightarrow \infty$ is not given by $\varphi_1(y)$, since $s = 1$ is not isolated.

In the case of the Laplace transformation we can combine different probability densities $a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)$ to a chain. This can be done because the corresponding eigenfunctions do not depend on the shape of these functions,

the form of the function $a(z)$ itself determines only the eigenvalues. The general Markoff chain with transition probabilities $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, etc. can again be treated simply, provided these functions, regarded as kernels, contain exactly the same eigenfunctions. This is possible, if e. g. $a(x, y)$ and $A_k(x, y)$ possess the same set of eigenfunctions.

The restriction that the functions $a_k(x, y)$ ($k = 1, 2, 3$), should have the same eigenfunctions is, however, in general a very severe one.

§ 4. The Mellin transform is obtained if we were to postulate

$$a(x, y) = a(y, x).$$

The case of the Mellin transform is, however, not essentially different from that of the Laplace transform and no special discussion is necessary.

A simple example is the case where $a(x, y)$ is a polynomial. Suppose e. g.

$$a(x, y) = \begin{cases} \sum_{v, \mu=0}^n a_{v\mu} x^v y^\mu & \text{if } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The normalization condition gives

$$\sum_{\mu=0}^n \frac{a_{v\mu}}{\mu+1} = \begin{cases} 1 & \text{if } v=0, \\ 0 & \text{if } v \neq 0. \end{cases}$$

There are n pairs of eigenfunctions

$$\varphi_s(y) = \sum_{v=1}^n \varphi_{sv} y^v, \quad \psi_s(x) = \sum_{v=1}^n \psi_{sv} x^v, \quad s = s_1, s_2, \dots, s_n.$$

The s_k are the solutions of a secular equation which is obtained by inserting (32) into (13) and (14).

A numerical example is the following

$$a(x, y) = 1 + x - 2xy.$$

The eigenfunctions and eigenvalues are as follows

s	$\varphi_s(y)$	$\psi_s(x)$	$s \int \varphi_s(y) \psi(y) dy$
1	$5-3y$	1	7
-6	$2y-1$	$7x-3$	7

The above example shows all the properties discussed further above:

- (1) The absolute smallest eigenvalue is $s = 1$ corresponding to $\psi_1(x)$.
- (2) $a(x, y)$ can be developed in terms of the eigenfunctions:

$$1 + x - 2xy = \frac{5-3y}{7} - \frac{(2y-1)(7x-3)}{7}.$$

The asymptotic distribution is given by $(5-3y)/7$. Polynomials containing more terms can be treated similarly.

(Received 16 July 1951)

ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Л. ЯНОШИ (Будапешт)

(Р е з ю м е)

При помощи преобразования Лапласа можно очень просто рассматривать некоторые стохастические процессы. В настоящей статье доказывается, что метод преобразования Лапласа можно считать специальным случаем некоторого более общего преобразования функций. Такое более общее преобразование приводит к цели и тогда, когда нельзя применить преобразования Лапласа.

ÜBER GEWISSE RINGKONSTRUKTIONEN DURCH SCHIEFES PRODUKT

Von

L. RÉDEI (Szeged), korrespondierendem Mitglied der Akademie

In einer vorigen Arbeit [3] habe ich das allgemeine *schiefe Produkt* (oder das Hamiltonsche Produkt) von beliebigen Strukturen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ definiert, es dann dort in der Hauptsache nur zur Konstruktion von Gruppen verwendet. (Vgl. auch KOCHENDÖRFFER [2].) Hier werden wir zwei einfache Beispiele zur Konstruktion von Ringen betrachten, die übrigens einander sehr ähneln werden.

Als Ausgangspunkt nehmen wir die bekannte Ringkonstruktion

$$(1) \quad (a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta), \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, b\alpha + a\beta + \alpha\beta).$$

Über diese weiß man folgendes. Sind α, β die Elemente eines Ringes P , sind ferner a, b ganze Zahlen, so wird durch (1) die Menge der Paare (a, α) zu einem Erweiterungsring von P , der ein Einselement besitzt (nämlich $(1, 0)$). (Vgl. MCCOY [1].)

Jetzt wollen wir aber aus anderen Voraussetzungen ausgehen, und zwar wir nehmen stets an, daß P, R zwei Ringe mit den Elementen α, β, \dots bzw. a, b, \dots sind. Damit dann (1₂) einen Sinn hat, nehmen wir noch an, daß R ein Linksoperatorenbereich zu P ist. Das bedeutet, daß ein (eindeutiges) „Operatorprodukt“ $a\alpha (\in P)$ erklärt ist, über die Art dieser Operation soll aber nichts vorausgesetzt werden. Mit Σ bezeichnen wir die Menge der Paare (a, α) . In dieser definieren wir die Addition und Multiplikation durch (1) und bezeichnen die so entstandene (algebraische) Struktur mit Σ_1 .

Ferner betrachten wir auch diejenige Struktur Σ_2 , die von Σ_1 darin abweicht, daß in ihr die beiden Verknüpfungen (statt (1)) durch

$$(2) \quad (a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta), \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta)$$

definiert werden (man hat bloß $b\alpha$ durch αb ersetzt). Damit das aber einen Sinn hat, soll jetzt R links- und rechtsseitiger Operatorenbereich von P sein mit den beiden Operationen $a\alpha, \alpha a (\in P)$.

Beide Strukturen Σ_1, Σ_2 können wir im Sinne der Arbeit [3] ein schiefes Produkt der Ringe R, P nennen. Wir stellen uns die Aufgabe, alle Ringe Σ_1, Σ_2 zu bestimmen.

Zur Lösung machen wir die folgende Vorbereitung. Wird die Operation $a\alpha$ durch die neue Operation

$$(3) \quad (a\alpha)' = a\alpha + \varrho \quad (2\varrho = 0)$$

ersetzt, wobei ϱ ein, der Bedingung $2\varrho = 0$ unterworfenen, konstantes Element von P ist, so bleibt (1), folglich auch Σ_1 unverändert. Wenn ferner die Operationen $a\alpha, \alpha\alpha$ durch die neuen Operationen

$$(4) \quad (a\alpha)' = a\alpha + \sigma, \quad (\alpha\alpha)' = \alpha\alpha - \sigma$$

ersetzt werden, wobei σ ein konstantes Element von P ist, so bleibt (2), folglich auch Σ_2 unverändert. Diese „Transformationen“ (3), (4) der Operationen nennen wir kurz (zulässige) *Verschiebungen*.

SATZ 1. *Unter den durch (1) definierten schiefen Produkten Σ_1 gewinnt man die sämtlichen Ringe so, daß man die Operationen $a\alpha$ den Bedingungen*

$$(5) \quad a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma,$$

$$(6) \quad (a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma,$$

$$(7) \quad a\beta\gamma = (a\beta)\gamma = \beta(a\gamma),$$

$$(8) \quad ab\gamma = a(b\gamma) = b(a\gamma)$$

unterwirft. (Hierzu kommen noch die verschobenen Operationen (3), die aber dasselbe leisten.)

SATZ 2. *Unter den durch (2) definierten schiefen Produkten Σ_2 gewinnt man die sämtlichen Ringe so, daß man die Operationen $a\alpha, \alpha\alpha$ den Bedingungen*

$$(9) \quad a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma, \quad (\alpha + \beta)c = \alpha c + \beta c,$$

$$(10) \quad (a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma, \quad \alpha(b + c) = \alpha b + \alpha c,$$

$$(11) \quad a\beta\gamma = (a\beta)\gamma, \quad \alpha\beta c = \alpha(\beta c),$$

$$(12) \quad ab\gamma = a(b\gamma), \quad abc = (ab)c,$$

$$(13) \quad (a\beta)c = a(\beta c),$$

$$(14) \quad (\alpha b)\gamma = \alpha(b\gamma).$$

unterwirft. (Hierzu kommen noch die verschobenen Operationen (4), die aber dasselbe leisten.)

BEMERKUNGEN. Es ist interessant, daß (5)—(8) eben mit den wohl-bekannten Operatorbedingungen für die Algebren P mit Einselement über R zusammenfallen. In einer anderen Arbeit [4] werde ich den Begriff der *Doppelalgebren* einführen (wichtige Ringe gehören hierzu wie z.B. die Polynomringe, die vollen Matrizenringe, die Ringe der sogenannten alternierenden Zahlen, die Quaternionenringe). (9)—(14) stimmen im wesentlichen mit den

Operatorbedingungen der Doppelalgebren überein. Man bedenke, daß die Operatorbedingungen für Algebren (und ebenfalls für Doppelalgebren) die Sache einer *willkürlichen* Vereinbarung sind, dagegen erweisen sich in den Sätzen 1, 2 dieselben Operatorbedingungen als *notwendig* (und hinreichend), damit Σ_1, Σ_2 Ringe sind. Deshalb erblickt man in den Bedingungen (5)–(14) ein erfreuliches Zusammentreffen der Willkür und Notwendigkeit. Man sieht übrigens auch, daß man die Ringeigenschaft von R nicht voraussetzen braucht (nur die Ausführbarkeit der beiden Verknüpfungen $a \vdash b, ab$ in ihm), denn offenbar muß R ein Ring sein, damit Σ_1 oder Σ_2 ein Ring ist.

Wir beweisen nun Satz 1. Wegen (1₁) ist Σ_1 ein Modul. Die Bedingung der linksseitigen Distributivität lautet nach (1) offenbar

$$(15) \quad (b+c)\alpha + a(\beta+\gamma) = b\alpha + c\alpha + a\beta + a\gamma.$$

Ferner ist dies zugleich auch die Bedingung der rechtsseitigen Distributivität.

Zur Unterscheidung von 0, dem Nullelement von P , bezeichne man mit $\mathbf{0}$ das Nullelement von R . Für $\gamma = 0$, bzw. $c = \mathbf{0}$ folgt aus (15)

$$(16) \quad (b+c)\alpha = b\alpha + c\alpha + a\mathbf{0},$$

$$(17) \quad a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma + \mathbf{0}\alpha.$$

Die Einsetzung in (15) ergibt

$$(18) \quad a\mathbf{0} + \mathbf{0}\alpha = 0$$

für alle $a(\in R), \alpha(\in P)$. Hiernach sind $a\mathbf{0}, \mathbf{0}\alpha$ von a und α unabhängig und somit beide gleich $\mathbf{0}\mathbf{0}$. Wird dieses Element mit $\varrho(\in P)$ bezeichnet, so gilt dann nach (18)

$$(19) \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0}\alpha = \varrho, \quad 2\varrho = 0.$$

Wird nunmehr die Verschiebung (3) angewendet und die neue Operation $(a\alpha)'$ wieder mit $a\alpha$ bezeichnet, so gehen (16), (17) eben in (5), (6) über, aus denen umgekehrt (15) folgt. Hiernach sind (5), (6) die Bedingungen der Distributivität von Σ_1 . Diese dürfen wir im folgenden schon voraussetzen, und dann haben wir nur noch zu zeigen, daß (7), (8) die Bedingung der Assoziativität für die Multiplikation (1₂) in Σ_1 ist.

Da nach (1₁) die Zerlegung

$$(20) \quad (a, \alpha) = (a, 0) \vdash (0, \alpha)$$

gilt, so genügt es wegen der Distributivität, daß man die Bedingungen der Assoziativität der Multiplikation für die Elemente von der Form $(a, 0), (0, \alpha)$ aufstellt. Es kommen die 8 Dreierprodukte

$$(21) \quad (a, 0)(b, 0)(c, 0), \quad (0, \alpha)(0, \beta)(0, \gamma),$$

$$(22) \quad (a, 0)(b, 0)(0, \gamma), \quad (0, \alpha)(0, \beta)(c, 0),$$

$$(23) \quad (a, 0)(0, \beta)(c, 0), \quad (0, \alpha)(b, 0)(0, \gamma),$$

$$(24) \quad (0, \alpha)(b, 0)(c, 0), \quad (a, 0)(0, \beta)(0, \gamma)$$

in Betracht. Die Produkte (21) sind wegen (1_2) offenbar assoziativ. Für (22), (23) sind die Assoziativitätsbedingungen nach (1_2) eben (7), (8). Dagegen führt (24) zu keinen neuen Bedingungen, womit Satz 1 bewiesen ist.

Im Beweis von Satz 2 tritt nur wenig Änderung auf. Die Moduleigenschaft von Σ_2 ist nach (2_1) klar. Die Distributivitätsbedingungen sind jetzt nach (2)

$$(25) \quad a(b+c) + a(\beta+\gamma) = ab + ac + a\beta + a\gamma,$$

$$(26) \quad (b+c)\alpha + (\beta+\gamma)a = b\alpha + c\alpha + \beta a + \gamma a.$$

Man setze in (25), (26) zuerst $\gamma = 0$, dann $c = 0$ ein:

$$(27) \quad a(b+c) = ab + ac + a0,$$

$$(28) \quad (b+c)\alpha = b\alpha + c\alpha + 0a,$$

$$(29) \quad a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma + a0,$$

$$(30) \quad (\beta+\gamma)a = \beta a + \gamma a + 0a.$$

Werden diese in (25), (26) eingesetzt, so folgt

$$a0 + a0 = 0,$$

$$0a + 0a = 0.$$

Die vier Glieder links müssen von a und α unabhängig sein, hieraus folgt sofort

$$a0 = 0a = -\sigma, \quad a0 = 0a = \sigma$$

mit einem passenden $\sigma (\in P)$, das übrigens gleich 00 ist. Wird (4) angewendet und werden die verschobenen Operationen $(a\alpha)$, $(\alpha a)'$ wieder mit $a\alpha$, αa bezeichnet, so gehen (27)–(30) in (9), (10) über, aus denen umgekehrt (25), (26) folgt. Das übrige geschieht so wie vordem, und zwar sind (11)–(14) nach (2_2) eben die Assoziativitätsbedingungen für die Produkte (22)–(24). Satz 2 haben wir somit bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] N. H. MCCOY, *Rings and ideals* (Buffalo, 1948).
- [2] R. KOCHENDÖRFFER, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journ. für reine u. angew. Math.* (im Erscheinen).
- [3] L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journ. für reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201–227.
- [4] L. RÉDEI, Doppelalgebren, *Acta Math.* (in Vorbereitung).

(Eingegangen am 5. November 1951.)

О НЕКОТОРЫХ ПОСТРОЕНИЯХ КОЛЕЦ ПРИ ПОМОЩИ КОСОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Л. РЭДЭИ (Cered)

(Р е з ю м е)

В одной предыдущей работе [3] автор рассмотрел принцип общего косоого произведения (или произведения Гамильтона) и применил его к построению групп. Здесь рассматриваются два простых примера построения колец.

В первом примере применяется очень простое правило действий:

$$(1) \quad (a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta), \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, b\alpha + a\beta + \alpha\beta).$$

Известно, что если a, β элементы некоторого кольца P и a, b целые числа, то пары (a, α) на основании (1) составляют кольцо, которое может считаться кольцом расширения P (McSoy [1]). Здесь исходным пунктом является более общее условие, согласно которому a, b элементы кольца R , которое относится к P в качестве (левой) области операторов, то есть каждое произведение операторов $a\alpha$ есть оцределённый элемент P , о котором ничего больше не предполагается, а исследовано необходимое и достаточное условие того, чтобы пары (a, α) образовывали кольцо на основании (1). За исключением незначительных расхождений получаются обычные в алгебрах операторные условия.

Во втором примере определено произведение равенством

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a\beta + \alpha b + \alpha\beta)$$

предполагая, что R является одновременно левой и правой областью операторов P . Получающееся таким образом операторные условия в сущности те же, которыми определены двойные алгебры, соответствующие алгебре, в одной готовящейся работе [4].

ÜBER DIE FEUERBACHSCHEN KUGELN MEHRDIMENSIONALER ORTHOZENTRISCHER SIMPLEXE

Von

G. HAJÓS (Budapest), korrespondierendem Mitglied der Akademie

E. EGERVÁRY¹ hat für $(n-1)$ -dimensionale orthozentrische Simplexe Σ in Verallgemeinerung der bekannten zwei- und dreidimensionalen Fälle die Folge $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ Feuerbachscher Kugeln eingeführt, unter welchen Φ_k die Schwerpunkte und die Orthozentren aller $(k-1)$ -dimensionalen Teilsimplexe von Σ enthält. Ist $k=2$, so ist dabei als Orthozentrum einer Kante die orthogonale Projektion des Orthozentrums von Σ auf die Kante zu verstehen. Ist $k=1$, so erhält man die Umkugel Φ_1 des Simplexes; ist $k=n$, so bedeutet Φ_n die Thaleskugel über die Verbindungsstrecke des Schwerpunktes und des Orthozentrums von Σ .

E. EGERVÁRY hat bei seiner Untersuchung auf Σ bezogene baryzentrische Koordinaten benutzt und u. a. bewiesen, daß die Folge der Feuerbachschen Kugeln einem Kugelbüschel zugehört; daß ihre Mittelpunkte C_1, C_2, \dots, C_n auf der durch das Orthozentrum O und den Schwerpunkt S bestimmten Eulerschen Geraden liegen und

$$OC_k : OS = n : 2k$$

ist; daß weiter für ihre Halbmesser r_1, r_2, \dots, r_n eine Relation

$$(2kr_k)^2 = a(n-2k)^2 + b$$

mit Konstanten a und b besteht, woraus insbesondere für die Halbmesser komplementärer Feuerbachscher Kugeln die Relation

$$kr_k = (n-k)r_{n-k}$$

folgt; daß ferner, wenn O_{n-k} das Orthozentrum eines $(n-k-1)$ -dimensionalen Teilsimplexes bedeutet und O'_k durch

$$OO'_k : OO_{n-k} = (n-k) : k$$

auf der Geraden OO_{n-k} bestimmt ist, dann O'_k auf Φ_k liegt; daß endlich bei einem orthozentrischen Punktsystem von $n+1$ Punkten [im $(n-1)$ -dimen-

¹ E. EGERVÁRY, On orthocentric simplexes, *Acta. Scient. Math. Szeged.*, **9** (1940), pp. 218—226; On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), pp. 5—15.

sionalen Raume] die Kugeln Φ_k aller enthaltenen Simplexe nur bei $2k = n+1$ gleiche Halbmesser besitzen.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist, die erwähnten Resultate mit Hilfe elementarer Vektorrechnung zu beweisen. Die anzuwendende Methode entstand aus einer von T. SZELE² gegebenen vektorarithmetischen Behandlung des Feuerbachschen Kreises in der Ebene. Unsere Überlegungen werden auch gewisse Ergänzungen der erwähnten Resultate liefern.

1. Wir bezeichnen die Scheitelpunkte des $(n-1)$ -dimensionalen ($n \geq 2$) orthozentrischen Simplexes Σ mit A_1, A_2, \dots, A_n und ihre aus dem Orthozentrum O auslaufenden Ortsvektoren mit $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Laut der Definition ist der Vektor \mathbf{a}_i auf alle nicht aus A_i auslaufenden Kanten orthogonal, also

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k) = 0 \quad (j, k \neq i),$$

woraus folgt, daß

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = c \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n)$$

eine von der Wahl der Indizes i, j unabhängige Konstante ist. Daraus folgt unmittelbar der

HILFSSATZ. Ist $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n| = 1$, so bleibt die Länge des Vektors

$$\varepsilon_1 \mathbf{a}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \varepsilon_n \mathbf{a}_n$$

unverändert, wenn die Koeffizienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ permutiert werden.

Das Quadrat dieses Vektors ist nämlich

$$\sum_i \mathbf{a}_i^2 + 2c \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j,$$

welcher Ausdruck tatsächlich keine Änderung unter einer Permutation der Zahlen ε_i erleidet. Um spätere Rechnung zu erleichtern, bemerken wir schon hier, daß für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_k = -1, \varepsilon_{k+1} = \dots = \varepsilon_n = 1$

$$2 \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j = (n-2k)^2 - n$$

ist.

Wir werden nur von O auslaufende Ortsvektoren benutzen und die Schreibweise $A = \mathbf{a}$ gebrauchen, wenn \mathbf{a} der Ortsvektor von A ist. Mit λA bezeichnen wir den Punkt vom Ortsvektor $\lambda \mathbf{a}$.

2. Sei $k = 1, 2, \dots, n-1$. Wir betrachten die Schwerpunkte der $(k-1)$ -dimensionalen Teilsimplexe von Σ . Einer von diesen ist

$$S_k = \frac{1}{k} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k).$$

Alle diese Schwerpunkte liegen auf einer um

$$C_k = \frac{1}{2k} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n)$$

² T. SZELE, Elemi geometriai problémák megoldása vektorokkal, *A középiskolai matematikatanítás kérdései* (Budapest, 1950), pp. 75–93.

geschlagenen Kugel Φ_k , denn die Länge des aus C_k in S_k führenden Vektors

$$\frac{1}{2k}(-\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \dots - \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{k+1} + \dots + \mathbf{a}_n)$$

bleibt nach dem Hilfssatz bei Permutation der Indizes unverändert.

Wir betrachten weiter die Schwerpunkte S_{n-k} der $(n-k-1)$ -dimensionalen Teilsimplexe und behaupten, daß die Punkte S_k und $\frac{n-k}{k} S_{n-k}$ paarweise diametral gegenüber einander auf Φ_k liegen. Ist nämlich einer der Punkte S_{n-k}

$$S_{n-k} = \frac{1}{n-k}(\mathbf{a}_{k+1} + \mathbf{a}_{k+2} + \dots + \mathbf{a}_n),$$

also

$$\frac{n-k}{k} S_{n-k} = \frac{1}{k}(\mathbf{a}_{k+1} + \mathbf{a}_{k+2} + \dots + \mathbf{a}_n),$$

so ist mit dem obigen S_k

$$S_k + \frac{n-k}{k} S_{n-k} = 2C_k,$$

was eben unsere Behauptung beweist.

3. Sei O_k das Orthozentrum eines $(k-1)$ -dimensionalen Teilsimplexes $A_1 A_2 \dots A_k$. Sein $(k-1)$ -dimensionaler Raum ist total orthogonal auf den $(n-k)$ -dimensionalen, die Punkte $O, A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ enthaltenden Raum. Da O_k gemeinsamer Punkt beider Räume ist, da ferner der eine Raum den Punkt S_k , der andere den Punkt $\frac{n-k}{k} S_{n-k}$ enthält, und beide genannten Punkte diametral gegenüber einander auf Φ_k liegen, liegt nach dem Thales'schen Satze auch O_k auf Φ_k .

Ähnliche Überlegung zeigt, daß auch die Punkte $\frac{n-k}{k} O_{n-k}$ auf Φ_k liegen, wobei O_{n-k} das Orthozentrum eines $(n-k-1)$ -dimensionalen Teilsimplexes bezeichnet. Ist nämlich O_{n-k} das Orthozentrum des durch die Punkte $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ bestimmten Teilsimplexes, so ist $\frac{n-k}{k} O_{n-k}$ in beiden durch die Punkte O, A_1, A_2, \dots, A_k , bzw. $\frac{n-k}{k} A_{k+1}, \frac{n-k}{k} A_{k+2}, \dots, \frac{n-k}{k} A_n$ ausgespannten, total orthogonalen Räumen enthalten. Da aber der eine der genannten Räume den Punkt S_k , der andere den Punkt $\frac{n-k}{k} S_{n-k}$ enthält, liegt $\frac{n-k}{k} O_{n-k}$ nach dem Thales'schen Satze auf Φ_k .³

³ Mit Hilfe der in der Einleitung über r_k und r_{n-k} erwähnten Formel folgt einfach, daß die Kugeln Φ_k und Φ_{n-k} samt allen ihren oben erwähnten Punkten homothetisch bezüglich des Punktes O liegen.

4. Im Falle $k = n$ kann von der um

$$C_n = \frac{1}{2n} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n)$$

geschlagenen, den Schwerpunkt S von Σ enthaltenden Kugel Φ_n nur behauptet werden, daß sie auch das Orthozentrum O von Σ enthält und daß S und O diametral gegenüber einander auf ihr liegen. Das folgt nämlich unmittelbar aus $S = 2C_n$. Somit ergibt sich die orthozentroidale Kugel Φ_n von Σ als Abschließung der Folge von Feuerbachschen Kugeln.

5. Die Ortsvektoren der Mittelpunkte C_1, C_2, \dots, C_n zeigen, daß sie auf der die Punkte O und S verbindenden Eulerschen Geraden liegen und

$$C_k = \frac{n}{2k} S$$

ist. Bei ungerader Dimensionszahl ist also auch S selbst Mittelpunkt einer Feuerbachschen Kugel.

Für den Halbmesser r_k von Φ_k ergibt sich nach 1 und 2

$$r_k^2 = \left[\frac{1}{2k} (-\mathbf{a}_1 - \dots - \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{k+1} + \dots + \mathbf{a}_n) \right]^2 = \frac{1}{4k^2} \left[\sum_i \mathbf{a}_i^2 + c((n-2k)^2 - n) \right],$$

womit wir die in der Einleitung erwähnte Formel erhalten haben. Diese Formel zeigt zugleich, daß r_k^2 ein quadratisches Polynom von $\frac{1}{k}$, also auch des Mittelpunktabstandes OC_k ist (mit von k unabhängigen Koeffizienten), daß also die Feuerbachschen Kugeln demselben Kugelbüschel zugehören.

6. Die Eulersche Gerade enthält auch

$$E = \frac{1}{n+1} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n),$$

den Schwerpunkt der Punkte O, A_1, A_2, \dots, A_n . Wegen $C_k = \frac{n+1}{2k} E$ ergibt sich

$$EC_k : EO = 1 - OC_k : OE = 1 - \frac{n+1}{2k}.$$

Wir betrachten nun das orthozentrische System der $n+1$ Punkte O, A_1, A_2, \dots, A_n . Durch Weglassen eines von diesen erhält man n Punkte, die ein orthozentrisches Simplex bestimmen, dessen Orthozentrum der weggelassene Punkt ist. Nach den eben Bemerkten gehen die Eulerschen Geraden aller dieser $n+1$ Simplexe durch den Punkt E . Die zu diesen Simplexen gehörenden Punkte C_k bilden ein mit dem ursprünglichen orthozentrischen Punktsystem homothetisches Punktsystem. Das Zentrum dieser Homothetie ist E und das Homothetieverhältnis ist $1 - \frac{n+1}{2k}$.

7. Um die Halbmesser aller vorkommenden Feuerbachschen Kugeln vergleichen zu können, führen wir die Quadratsumme aller Abstände der $n+1$ Punkte ein, welche Quadratsumme

$$q = \sum \mathbf{a}_i^2 + \sum (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)^2 = n \sum \mathbf{a}_i^2 - n(n-1)c$$

ausfällt. Somit ist nach 5

$$r_k^2 = \frac{1}{4k^2} \left[\frac{q}{n} + ((n-2k)^2 - 1)c \right].$$

Ist A_i der weggelassene Punkt, so tritt an Stelle von c der Ausdruck

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) = \mathbf{a}_i^2 - c.$$

Sind alle diese Ausdrücke gleich c , so ist

$$\cos(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \frac{c}{|\mathbf{a}_i||\mathbf{a}_j|} = \frac{1}{2}$$

und somit das Simplex Σ regelmäßig. Die Halbmesser der $n+1$ Kugeln ϕ_k stimmen also für ein jedes k nur bei regelmäßigen Simplexen überein.

Ist Σ nicht regelmäßig, so sind die Halbmesser der $n+1$ Kugeln ϕ_k nach der obigen Formel nur bei $k = \frac{n+1}{2}$ gleich, was nur bei gerader Dimensionszahl vorkommen kann. Ist $k = \frac{n+1}{2}$, so stimmen nicht nur die Halbmesser überein, sondern die Kugeln ϕ_k selbst fallen auch zusammen, da in diesem Falle das oben erwähnte Homothetieverhältnis 0 ist.

(Eingegangen am 20. Dezember 1951.)

О ШАРАХ ФЕЙЕРБАХА МНОГОМЕРНЫХ ОРТОЦЕНТРИЧЕСКИХ СИМПЛЕКСОВ

Г. ГАЁШ (Будапешт)

(Р е з ю м е)

Э. Эгервари ввёл последовательность шаров Феиербаха $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ относительно $n-1$ мерных ортоцентрических симплексов. Шар содержит центры тяжести и ортоцентры $k-1$ мерных субсимплексов исходного симплекса. Э. Эгервари при помощи барицентрических координат, относящихся к ортоцентрическому симплексу, определил распределение этих шаров относительно друг друга и доказал ряд характерных для них свойств.

Настоящая работа добывает эти же результаты векторарифметическим путём и несколько дополняет их.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ СИЛОВСКИХ p -ПОДГРУПП СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

Л. А. КАЛУЖНИН (Берлин)

(Представлено Л. Рэдэи)

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена одному обобщению силовских p -подгрупп симметрических групп. Силовские p -подгруппы симметрических групп изучались в моей работе „La structure des p -groupes de Sylow des groupes symétriques finis“¹, где были, между прочим, установлены все характеристические подгруппы таких групп. Изучение это производилось при помощи так называемого „представления таблицами“ — метода, который связан с понятием полного произведения групп.

Это понятие я ввожу в § 1 настоящей работы. Если \mathfrak{G} и \mathfrak{H} группы подстановок множеств M и N , то полное произведение $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}$ — это импримитивная группа таких подстановок σ теоретико-множественного произведения $M \times N$, что:

1. подмножества $\mu \times N$ множества $M \times N$ с зафиксированной первой координатой μ суть системы импримитивности σ ,
2. σ индуцирует во множестве этих систем импримитивности подстановку, принадлежащую к группе \mathfrak{G} ,
3. σ индуцирует в каждой такой системе импримитивности подстановку, принадлежащую к группе \mathfrak{H} .

Понятие полного произведения двух групп распространяется непосредственно на случай любой конечной или трансфинитной последовательности групп подстановок.²

Группы \mathfrak{K}_m таблиц ранга m , рассматриваемые мною в вышеуказанной работе (KALOUJNINE [1]), являются полными произведениями m циклических

¹ *Ann. Ec. Normale*, 3 (65), (1948), p. 239—276. (Цитируется в дальнейшем как KALOUJNINE [1].)

² Как оказывается, полное произведение групп теснейшим образом связано с теорией Шрейера о расширениях групп и с возможными обобщениями этой теории. Этот вопрос рассматривается в работе М. Krasner—L. KALOUJNINE, *Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes*. I, *Acta Scient. Math.*, 13 (1950), p. 208—230.; II. 14 (1951), p. 39—66; III. 14 (1951), p. 69—82.

групп порядка простого числа p . В настоящей работе изучается полное произведение бесконечной последовательности циклических групп порядка p — группа, которую мы обозначаем через \mathfrak{P}_∞ .

\mathfrak{P}_m является силовской p -подгруппой конечной симметрической группы степени p^m (KALOUJNINE [1]), откуда непосредственно следует, что любая конечная p -группа изоморфна некоторой транзитивной подгруппе группы \mathfrak{P}_m для подходящего m . Подобную характеристику можно так-же дать и для группы \mathfrak{P}_x . Мы называем полуконечной группой абстрактную группу \mathfrak{G} , обладающую такой цепочкой подгрупп $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{(0)} \supset \mathfrak{G}^{(1)} \supset \dots \supset \mathfrak{G}^{(r)} \supset \dots$, что 1. для каждого r индекс $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^{(r)})$ конечен и что 2. $\bigcap_r \mathfrak{G}^{(r)}$ содержит только единицу группы \mathfrak{G} . В частности, полуконечная группа \mathfrak{G} называется p_x -группой, если для каждого r $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^{(r)})$ есть степень простого числа p . Оказывается, что любая p_x -группа изоморфна некоторой подгруппе группы \mathfrak{P}_x и, так как сама группа \mathfrak{P}_∞ является p_x -группой, то она в этом смысле универсальная p_x -группа.

С другой стороны, группа \mathfrak{P}_x может быть охарактеризована как силовская p -подгруппа (в смысле Ван Даницга³ и А. Г. Куроша⁴) группы изометрий некоторого пространства Кантора.

Для установления вышеуказанных результатов я развил в §§ 3 и 4 теорию представления полуконечных и в частности Канторовских групп изометриями нульмерных (ультраметрических) пространств. Мне кажется, что связь этой теории с понятием полного произведения не лишена интереса.

В § 5 я устанавливаю, пользуясь результатами моей работы (KALOUJNINE [1]), все характеристические подгруппы группы \mathfrak{P}_x , замкнутые относительно некоторой топологии.

§ 1. ПОЛНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

Пусть \mathfrak{G} группа подстановок некоторого множества M , а \mathfrak{H} группа подстановок множества N . Мы порежим новую группу подстановок \mathfrak{E} теоретико-множественного произведения $S = M \times N$ — группу, которую мы назовем полным произведением групп \mathfrak{G} и \mathfrak{H} и которую будем записывать в виде $\mathfrak{E} = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}$.

Множество $S = M \times N$ является по определению множеством пар (μ, ν) , где $\mu \in M$ и $\nu \in N$. Пусть \mathfrak{E} — совокупность подстановок σ множества S , определённых следующим образом:

$$\sigma(\mu, \nu) = (\mu', \nu'),$$

причём

³ D. VAN DANTZIG, Zur topologischen Algebra, III. *Compositio Math.*, 3(1936), p. 408—426.

⁴ А. Г. Курош, Силовские подгруппы нульмерных топологических групп, Изв. Акад. Наук СССР матем. серия, 9 (1945), стр. 65—78.

1. $\mu' = \gamma\mu$, где γ принадлежит к \mathfrak{G} и

(1, 1)

2. $\nu' = \chi_\mu \nu$, где χ_μ есть подстановка из группы \mathfrak{H} , зависящая от μ .

Положим $g: \{\mu \rightarrow \gamma\mu\}$ и $h(x): \{\nu \rightarrow \chi_\mu \nu\}$, ($x \in M$) (т. е. $h(x)$ есть функция, определённая на M со значениями в группе подстановок \mathfrak{H}), тогда подстановку σ мы будем записывать в форме $\sigma = [g, h(x)]$ и будем называть $[g, h(x)]$ таблицей подстановок, соответствующей подстановке σ .

Очевидно, что подстановки σ , определённые уравнениями (1, 1) обладают следующими свойствами:

а. Множества $S_\mu = \mu \times N$ элементов S с фиксированной первой координатой μ суть системы импримитивности подстановок σ .

б. Подстановки, индуцированные σ в первых координатах элементов S , принадлежат к группе \mathfrak{G} .

в. Подстановки, индуцированные σ в множествах $S_\mu = \mu \times N$, суть элементы группы \mathfrak{H} (зависящие от μ).

С другой стороны ясно, что всякая подстановка σ , удовлетворяющая условиям а. б. в., может быть записана в вышеуказанной форме таблицы подстановок и является элементом \mathfrak{S} .

Произведение $\bar{\sigma}$ двух подстановок $\sigma = [g, h(x)]$ и $\bar{\sigma} = [\bar{g}, \bar{h}(x)]$ из \mathfrak{S} будет, очевидно, подстановкой множества $S = M \times N$, определённой следующими равенствами:

$$\bar{\sigma}(\mu, \nu) = (\mu'', \nu''),$$

причём

$$\mu'' = \bar{\gamma}(\gamma\mu) = \bar{\gamma}\gamma\mu$$

и, обозначая через μ' первую координату от $\sigma(\mu, \nu)$,

$$\nu'' = \chi_{\mu'}(\chi_\mu \nu) = \chi_{\gamma(\mu)} \chi_\mu \nu.$$

Отсюда мы находим нижеследующий закон умножения таблиц подстановок:

$$(1, 2) \quad [\bar{g}, \bar{h}(x)] \cdot [g, h(x)] = [\bar{g}g, \bar{h}(\gamma x)h(x)].$$

Этот закон, конечно, ассоциативен.

Пусть $1(\mathfrak{G})$ — единица группы \mathfrak{G} , а $e(x)$ — функция тождественно равная тождественной подстановке $1(\mathfrak{H})$ группы \mathfrak{H} . Тогда совершенно ясно, что таблица подстановок $[1(\mathfrak{G}), e(x)]$ представляет собой тождественную подстановку множества $S = M \times N$. С другой стороны, в силу закона (1, 2), для любой таблицы $\sigma = [g, h(x)]$, принадлежащей к \mathfrak{S} , имеет место равенство

$$[g^{-1}, h^{-1}(\gamma^{-1}x)][g, h(x)] = [1(\mathfrak{G}), e(x)] = 1(\mathfrak{S}),$$

что показывает существование обратной таблицы

$$(1, 3) \quad [g, h(x)]^{-1} = [g^{-1}, h^{-1}(\gamma^{-1}x)]$$

для каждой таблицы $\sigma \in \mathfrak{S}$. Тем самым, \mathfrak{S} образует группу подстановок множества $S = M \times N$, которую мы и называем полным произведением групп \mathfrak{G} и \mathfrak{H} .

Не трудно показать, что группа Ξ транзитивна в том и только том случае, если группы \mathfrak{G} и \mathfrak{H} транзитивны.

Совершенно очевидно так-же, что если \mathfrak{G} и \mathfrak{H} группы подстановок конечной степени, то для порядка и степени их полного произведения $\Xi = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}$ имеют место равенства:

$$(1, 4) \quad \text{порядок } (\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}) = (\text{порядок } \mathfrak{G}) \cdot (\text{порядок } \mathfrak{H})^{\text{степень } \mathfrak{G}}$$

и

$$(1, 5) \quad \text{степень } (\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}) = (\text{степень } \mathfrak{G}) (\text{степень } \mathfrak{H}).$$

Из этого уже видно, что, вообще говоря, $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H} \not\sim \mathfrak{H} \circ \mathfrak{G}$, т. е. полное произведение не перестановочно.

С другой стороны, полное произведение ассоциативно; а именно, если \mathfrak{K} какая-то третья группа подстановок множества K , то полные произведения $(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{G} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{K})$ представляют собой одну и ту-же группу подстановок множества $M \times N \times K$, которую мы будем записывать $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H} \circ \mathfrak{K}$.

Подстановки $\tau \in \mathfrak{G} \circ \mathfrak{H} \circ \mathfrak{K}$ — суть подстановки множества $M \times N \times K$ такие, что

$$\tau(\mu, \nu, \kappa) = (\mu', \nu', \kappa'),$$

причём

- 1) $\mu' = \gamma \mu$ $\gamma \in \mathfrak{G}$,
- 2) $\nu' = \chi_\mu \nu$ $\chi_\mu \in \mathfrak{H}$ зависящий от μ ,
- 3) $\kappa' = \zeta_{\mu, \nu} \kappa$ $\zeta_{\mu, \nu} \in \mathfrak{K}$ зависящий от μ, ν .

Таким образом мы можем рекуррентно определить полное произведение конечного числа групп подстановок. Путем трансфинитной индукции можно также определить полное произведение любого благорасположенного множества групп подстановок.

Дадим такое определение непосредственно. Пусть будет a какое-то ординальное (трансфинитное) число. Будем обозначать через Ω_a отрезок ординальных чисел $\leq a$. Для каждого $b \in \Omega_a$, пусть будет $\mathfrak{G}^{(b)}$ группа подстановок $\gamma^{(b)}$ абстрактного множества $M^{(b)} = \{\mu^{(b)}\}$. Для удобства записи прибавим к этим множествам некоторое множество M^0 , состоящее из одного только элемента μ^0 . Для всякого ординального числа d , $0 \leq d \leq a$, обозначим через U^d теоретико-множественное произведение множеств $M^{(c)}$ ($0 \leq c < d$)

$$U^{(d)} = \prod_{c=0}^{d-1} M^{(c)}.$$

В силу определения, элементы $u^{(d)}$ множества $U^{(d)}$ суть семейства $(\mu^{(c)})$, где для всякого $c < d$ $\mu^{(c)} \in M^{(c)}$. $\mu^{(c)}$ называется c -той координатой элемента $u^{(d)}$.

Для $f < d$, $u^{(f)} \in U^{(f)}$ будет называться f -отрезком элемента $u^{(d)}$, если для всякого $g < f$ g -тая координата $u^{(f)}$ совпадает с g -той координатой $u^{(d)}$. $U^{(a)}$ и $u^{(a)}$ будут также записываться U и u .

Для всякого $b \in \Omega_a$ пусть будет $g^{(b)}(x^{(b)})$ ($x^{(b)} \in U^{(b)}$) отображение $U^{(b)}$ в $\mathfrak{G}^{(b)}$. Образ в $\mathfrak{G}^{(b)}$ какого-нибудь определённого элемента $u^{(b)}$ при этом отобра-

ражении будем записывать $g^{(b)}(u^{(b)}) = \gamma_{u^{(b)}}^{(b)}$. Назовём таблицей подстановок последовательность $A = [g^{(b)}(x^{(b)})]$, где b пробегает Ω_a . $g^{(b)}(x^{(b)})$ называется b -той координатой таблицы A и обозначается через $[A]_b$. Условимся называть рангом таблицы число $a-1$, если a конечное число, и число a , если a бесконечное ординальное число.⁵

Для всякого $b < a$, пусть будет $A^{(b)}$ таблица подстановок ранга b , все координаты которой совпадают с соответствующими координатами таблицы A . $A^{(b)}$ назовём b -отрезком таблицы A .

С помощью этих понятий мы можем теперь определить полное произведение групп $(\mathfrak{S})^{(b)}$. Каждой таблице подстановок мы сопоставим отображение множества U в самое-себя, положив для всякого $u \in U$ $Au = u'$, причём координаты $\mu^{(b)}$ элемента u' определяются следующим образом:

$$\mu^{(0)} = \mu^{(0)}$$

и

$$\mu^{(b)} = \gamma_{u^{(b)}}^{(b)} \cdot \mu^{(b)}, \quad \text{где } \gamma_{u^{(b)}}^{(b)} = g^{(b)}(u^{(b)}) \in (\mathfrak{S})^{(b)}.$$

Легко видеть, что для $b < a$ отображение, индуцированное таблицей A в $U^{(b)}$, соответствует как раз отрезку ранга b таблицы A .

Последовательное применение отображений, соответствующих таблицам $A = [g^{(b)}(x^{(b)})]$ и $A' = [g^{(b)}(x^{(b)})]$, есть отображение $A'A$, соответствующее таблице

$$(1, 6) \quad A'A = [g^{(b)}(x^{(b)})][g^{(b)}(x^{(b)})] = [g^{(b)}(A^{(b)}x^{(b)}) \cdot g^{(b)}(x^{(b)})].$$

Тождественному отображению соответствует таблица $[e^{(b)}(x^{(b)})]$, где $e^{(b)}(x^{(b)})$ есть функция, тождественно равная единице группы $(\mathfrak{S})^{(b)}$.

Каждая таблица A обладает обратной; а именно

$$(1, 7) \quad A^{-1} = [g^{(b)}(x^{(b)})]^{-1} = [(g^{(b)}(A^{(b)-1}x^{(b)}))^{-1}],$$

причём таблицы $A^{(b)-1}$ определяются рекуррентно.

Тем самым совокупность Ξ отображений U (в самое себя), определённых вышеуказанным образом таблицами, представляют собой группу подстановок множества U . Эту группу Ξ мы и называем полным произведением (трансфинитной) последовательности групп $(\mathfrak{S})^{(b)}$ и записываем её в виде

$$\Xi = \prod_{b < a} \circ (\mathfrak{S})^{(b)}.$$

Группа Ξ может быть характеризована внутренними свойствами следующим образом:

⁵ Таким образом, при конечном количестве групп ранг таблицы равен числу её координат. Если множество координат A подобно ряду целых чисел, то рангом A является ω . Таблицы ранга $\omega+1$ — суть те, последние координаты которых типа $g^{(\omega)}(x^{(\omega)})$ и т. д.

Полное произведение Ξ (трансфинитной) последовательности групп подстановок $\mathfrak{S}^{(b)}$ множеств $M^{(b)}$ ($b < a$) есть группа всех таких подстановок σ теоретико-множественного произведения $U = \prod_{c < a} M^{(c)}$, что

1. для всякого $b < a$ непересекающиеся подмножества $u^{(b)} V^{(b)} = \{u^{(b)} \sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}^{(b)}\}$ всех элементов U , обладающих отрезком $u^{(b)}$, суть системы импримитивности подстановки σ , и что

2. для всякого $b < a$ и для всякого зафиксированного $u^{(b)}$ подстановка b -тых координат элементов $u^{(b)} V^{(b)}$, индуцированная σ , является подстановкой принадлежащей к группе $\mathfrak{S}^{(c)}$.

В настоящей работе мы будем пользоваться только таблицами ранга $\leq \omega$.

§ 2. ПОЛНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

Рассмотрим сперва случай полного произведения конечного числа конечных симметрических групп.

Пусть $\Xi_{n_1}, \Xi_{n_2}, \dots, \Xi_{n_s}$ симметрические группы подстановок конечных множеств $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(s)}$ и пусть $N^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) содержит n_i элементов. Полное произведение

$$\Xi_{n_1, n_2, \dots, n_s} = \Xi_{n_1} \circ \Xi_{n_2} \circ \dots \circ \Xi_{n_s}$$

мы будем называть мета-симметрической группой подстановок множества $N = N^{(1)} \times N^{(2)} \times \dots \times N^{(s)}$, а последовательность целых чисел (n_1, n_2, \dots, n_s) — мета-степенью группы $\Xi_{n_1, n_2, \dots, n_s}$.

В силу определения полного произведения, $\Xi_{n_1, n_2, \dots, n_s}$ является группой всех подстановок множества $N = N^{(1)} \times N^{(2)} \times \dots \times N^{(s)}$, для которых для всякого $i < s$ множества элементов N с зафиксированными i первыми координатами суть системы импримитивности.

Порядок группы $\Xi_{n_1, n_2, \dots, n_s}$ легко вычисляется по формуле (1, 4), и мы находим

$$(2, 1) \quad \text{порядок } \Xi_{n_1, n_2, \dots, n_s} = n_1! (n_2!)^{n_1} \dots (n_s!)^{n_1, n_2, \dots, n_{s-1}}.$$

В частности, для случая когда все n_i равны простому числу p

$$(2, 2) \quad \text{порядок } \Xi_{\underbrace{p, p, \dots, p}_m} = (p!)^{p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1}.$$

Поэтому наивысшая степень p , делящая порядок группы $\Xi_{\underbrace{p, p, \dots, p}_m}$ равняется $p^{p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1}$. Но это, как известно, также наивысшая степень p , делящая $p^m!$, т. е. порядок симметрической группы всех подстановок множества N . Тем самым доказана

Лемма 1. Всякая силовская p -подгруппа группы $\Xi_{\underbrace{p, p, \dots, p}_m}$ является одновременно силовской p -подгруппой симметрической группы Ξ_{p^m} .

Структура силовской p -подгруппы \mathfrak{P}_m группы \mathfrak{S}_{p^m} изучалась в работе КАЛОУЖНИН [1]. Читатель, знакомый с этой работой, заметит, что группа \mathfrak{P}_m является полным произведением m циклических групп порядка p (рассматриваемых как группы подстановок, соответствующих их регулярному представлению). В силу Леммы 1 тоже самое имеет место для силовских p -подгрупп группы $\mathfrak{S}_{\underbrace{p, p, \dots, p}_m}$. Этот факт легко доказать и непосредственно.

Докажем для этого следующую лемму:

Лемма 2. Пусть \mathfrak{G}_1 и \mathfrak{G}_2 будут группами подстановок конечных множеств $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$, а \mathfrak{H}_i одной из силовских p -подгрупп группы \mathfrak{G}_i ($i = 1, 2$), тогда $\mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{H}_2$ является одной из силовских p -подгрупп группы $\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$.

Доказательство. Совершенно ясно, что полное произведение подгруппы группы \mathfrak{G}_1 и подгруппы группы \mathfrak{G}_2 есть подгруппа группы $\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$.

Пусть m_i — число элементов множества $M^{(i)}$. Порядки групп $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ обозначим через k_1, k_2 , а наивысшие степени p , делящие k_1, k_2 через p^{l_1}, p^{l_2} . Тогда

$$\text{порядок } (\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2) = k_1 k_2^{m_1},$$

а наивысшая степень p , делящая этот порядок, равняется $p^{l_1 + m_1 l_2}$. Но $p^{l_1 + m_1 l_2}$ является как раз порядком группы $\mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{H}_2$, а это и показывает, что $\mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{H}_2$ силовская p -подгруппа группы $\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$, ч. и. т. д.

Лемма обобщается по индукции непосредственно на случай полного произведения любого конечного числа групп подстановок. Силовская p -подгруппа симметрической группы \mathfrak{S}_p есть циклическая группа порядка p и тем самым, в силу Леммы 2, силовская p -подгруппа мета-симметрической группы $\mathfrak{S}_{\underbrace{p, p, \dots, p}_m}$ есть полное произведение m циклических групп порядка p .

Таково положение вещей для случая полного произведения конечного числа конечных симметрических групп. Но, как мы видели в § 1, возможно также построить полное произведение трансфинитной последовательности групп подстановок. В частности, можно определить полное произведение трансфинитной последовательности конечных симметрических групп.

Если для каждого трансфинитного числа $b < a$, \mathfrak{S}_{n_b} является симметрической группой подстановок конечного множества $N^{(b)}$ из n_b элементов, то

полное произведение $\prod_{b < a} \mathfrak{S}_{n_b}$ мы будем, как и в случае конечного a , называть мета-симметрической группой теоретико-множественного произведения $\prod_{b < a} N^{(b)}$, а (трансфинитную) последовательность (n_b) метастепенью этой мета-симметрической группы.

Пусть $\mathfrak{S}_{\underbrace{p, p, \dots}_a}$ будет мета-симметрической группой для которой все $n_b = p$, а \mathfrak{P}_a полное произведение циклических групп порядка p , рас-

смаатриваемых как группы подстановок. Совершенно очевидно, что \mathfrak{P}_a представляет некоторую подгруппу группы $\mathfrak{S}_{p, p, \dots}$. Ограничиваясь случаем $a = \omega$,

мы покажем, что $\mathfrak{P}_\omega \cdot \mathfrak{P}_x$ представляет „силовскую p -подгруппу“ группы $\mathfrak{S}_{p, p, \dots}$, если соответственным образом обобщить понятие p -группы, а также,

что группа \mathfrak{P}_x является в некотором смысле универсальной для обобщенных p -групп. В §§ 3, 4 мы изложим эти необходимые обобщения — т. е. теорию ван Дандига и её связь с понятием полного произведения.

§ 3. ПОЛУКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ — УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Полуконечной будем называть группу (\mathfrak{G}) обладающую последовательностью подгрупп

$$(3, 1) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{K}^{(0)} \supset \mathfrak{K}^{(1)} \supset \dots \supset \mathfrak{K}^{(v)} \supset \dots$$

таких, что

IC. Для всякого v индекс $(\mathfrak{G} : \mathfrak{K}^{(v)})$ конечен и

$$\text{II C.} \quad \bigcap_v \mathfrak{K}^{(v)} = 1(\mathfrak{G}).$$

Последовательность подгрупп (\mathfrak{G}) удовлетворяющих IC. и II C. будем называть цепочкой и обозначать через $[(\mathfrak{K}^{(v)})]$.

Для всякой подгруппы \mathfrak{H} полуконечной группы (\mathfrak{G}) индекс $(\mathfrak{H} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}^{(v)})$ конечен и $\bigcap_v (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}^{(v)}) = 1(\mathfrak{H})$; таким образом подгруппа \mathfrak{H} полуконечна.

Мы будем говорить, что цепочка $[(\mathfrak{K}^{(v)})]$ группы (\mathfrak{G}) является p -цепочкой, если для всех v $(\mathfrak{G} : \mathfrak{K}^{(v)})$ суть степени простого числа p . Полуконечная группа, обладающая p -цепочкой, будет называться p_x -группой. (p_x -группа может, конечно, иметь цепочки, не являющиеся p -цепочками, и может даже для разных простых чисел p' и p'' быть p'_x -группой и p''_x -группой. Это видно на простом примере аддитивной группы Z целых рациональных чисел, которая является q_x -группой для любого простого числа q .)

Вполне очевидно, что любая конечная подгруппа p_x -группы является p -группой. Отсюда следует в частности, что порядок какого-либо элемента p_x -группы или бесконечен или является степенью p .

Если полуконечная группа (\mathfrak{G}) обладает цепочкой $[(\mathfrak{K}^{(v)})]$ и если $\mathfrak{K}^{(v)}$ не обязательно инвариантные подгруппы группы (\mathfrak{G}) , то $[(\bigcap_{A \in \mathfrak{G}} A \mathfrak{K}^{(v)} A^{-1})]$ будет также цепочкой группы (\mathfrak{G}) , состоящей из инвариантных подгрупп. При этом, если $[(\mathfrak{K}^{(v)})]$ — p -цепочка, то и $[(\bigcap_{A \in \mathfrak{G}} A \mathfrak{K}^{(v)} A^{-1})]$ будет p -цепочкой.

Впредь, когда мы будем говорить о цепочках, мы будем всегда подразумевать, что дело идет о цепочках, состоящих из инвариантных подгрупп группы (\mathfrak{G}) .

Если (\mathfrak{S}) p -группа, а $[(\mathfrak{M}^{(p)})]$ — p -цепочка (\mathfrak{S}) , то для каждого ν (\mathfrak{S}) $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ является конечной p -группой. В конечной p -группе индекс двух последовательных членов всякого главного ряда равняется p . Из этого легко заключить (пополняя цепочку $[(\mathfrak{M}^{(p)})]$), что (\mathfrak{S}) обладает цепочками $[(\mathfrak{S}^{(\nu)})]$ такими, что для каждого ν индекс $(\mathfrak{S}^{(\nu-1)}; \mathfrak{S}^{(\nu)}) = p$. Такие p -цепочки мы будем называть главными p -цепочками.

В полуконечной группе (\mathfrak{S}) цепочка $\{(\mathfrak{M}^{(p)})\}$ позволяет следующим образом определить метрику:

Пусть будет ι вещественное положительное число < 1 , выбранное раз на всегда (и которое не будет меняться на протяжении всей работы). Для двух различных элементов A и B группы (\mathfrak{S}) пусть будет n наибольшее из чисел ν таких, что $A^{-1}B \in \mathfrak{M}^{(\nu)}$.

Положим

$$d(A, B) = \iota^n.$$

(Определение это имеет смысл, ибо в силу П.С. существуют такие μ , что $A^{-1}B \notin \mathfrak{M}^{(\mu)}$.)

Для каждого $A \in (\mathfrak{S})$ положим

$$d(A, A) = 0.$$

Функция явно удовлетворяет нижеследующим условиям:

I U. $d(A, B)$ является или нулем или целой положительной степенью вещественного числа ι < 1 .

II U. $d(A, B) = 0$ тогда, и только тогда, если $A = B$.

III U. $d(A, B) = d(B, A)$.

IV U. $d(A, C) \leq \max(d(A, B), d(B, C))$.

Имеет место более точное соотношение

IVa U. Если $d(A, B) \neq d(B, C)$,
то $d(A, C) = \max(d(A, B), d(B, C))$.

Функция d двух переменных, определённая на каком-либо множестве и удовлетворяющая условиям I U—IV U называется ультраметрическим расстоянием. Ультраметрическим пространством называется множество, на котором определено ультраметрическое расстояние.⁶

Мы видим таким образом, что в полуконечной группе цепочка $[(\mathfrak{M}^{(p)})]$ позволяет определить структуру ультраметрического пространства.

Для трех любых элементов A, B, C группы (\mathfrak{S}) AB и AC (а также BA и CA) лежат в том-же классе $\text{mod } \mathfrak{M}^{(\nu)}$ тогда, и только тогда, если B и C лежат в том-же классе. Поэтому

$$d(AB, AC) = d(BA, CA) = d(B, C)$$

и, в силу, этого умножение в группе непрерывно по отношению к опреде-

⁶ Термины „ультраметрическое расстояние“ и „ультраметрическое пространство“ были введены М. Краснером.

лённой ультраметрике. Легко также убедиться, что отображение $A \rightarrow A^{-1}$ непрерывно для этой ультраметрики.

Полуконечную группу (\mathfrak{G}) , с определённой на ней вышеуказанным образом ультраметрикой, мы будем называть (полуконечной) ультраметрической группой.

Иногда более удобно рассматривать ультраметрическую группу как топологическую группу с топологией, соответствующей ультраметрике. За фундаментальную систему (открытых) окрестностей элемента $A \in (\mathfrak{G})$ берется тогда совокупность классов $\text{mod } \mathfrak{K}^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) содержащих A .

Для характеристики замкнутых подмножеств (и, в частности, замкнутых подгрупп) ультраметрической группы мы будем часто пользоваться следующей элементарной леммой:

Лемма 3. Подмножество M группы (\mathfrak{G}) замкнуто тогда, и только тогда, если

$$(3, 2) \quad M = \bigcap_n M \mathfrak{K}^{(n)}.$$

Теория представлений конечных групп группами подстановок естественным образом обобщается на случай ультраметрических групп. Дадим краткий обзор этой обобщённой теории.

Пусть будет T ультраметрическое пространство, а a, b, c, \dots его элементы. Для каждого n отношение $d(a, b) \leq \iota_n$ является отношением эквивалентности в T . (Рефлексивность следует из II U, симметричность из III U, транзитивность из IV U.) Поэтому для каждого n T разлагается в сумму попарно не пересекающихся множеств (классов эквивалентности). Эту эквивалентность мы будем называть n -тым девизором \mathcal{A}_n пространства T , а классы девизора \mathcal{A}_n будем обозначать через $T_n^{(u)}$ (где u пробегает какое-то множество индексов). Совокупность классов $T_n^{(u)}$ будем записывать T, \mathcal{A}_n . Выражение „ a сравнимо с b по модулю \mathcal{A}_n “ ($a \equiv b \pmod{\mathcal{A}_n}$) будет означать, что a и b лежат в том-же классе эквивалентности $\text{mod } \mathcal{A}_n$.

Если n пробегает неотрицательные целые числа, то последовательность девизоров \mathcal{A}_n ультраметрического пространства T удовлетворяет, очевидно, следующим условиям:

I D. T, \mathcal{A}_0 состоит из одного единственного класса $T^0 = T$ („тривиальная эквивалентность“).

II D. Для всякого n , каждый класс $T_n^{(u)} \in T, \mathcal{A}_n$ является объединением некоторых классов $T_{n+1}^{(v)}$ множества T, \mathcal{A}_{n+1} .

III D. Для двух различных элементов a и b из T существует такое целое число n , что

$$a \not\equiv b \pmod{\mathcal{A}_n}.$$

Обратно, если на каком-то множестве T определена последовательность эквивалентностей \mathcal{A}_n удовлетворяющих условиям I D—III D и если, с одной стороны, для двух различных $a, b \in T$ положить $d(\bar{a}, \bar{b}) = \iota_m$, где m есть

наибольшее из чисел n таких, что $\bar{a} \equiv b \pmod{J_n}$ и, с другой стороны, $d(\bar{a}, \bar{a}) = 0$ для всякого $\bar{a} \in T$, то легко проверить, что функция d удовлетворяет условиям $I U - I V U$ и T становится таким образом ультраметрическим пространством, девизорами которого являются эквивалентности J_r .

Отображение η ультраметрического пространства T на ультраметрическое пространство T' будем называть гомометрией, если образ каждого класса r -того девизора пространства T есть класс r -того девизора пространства T' , а прообраз каждого класса r -того девизора T' есть объединение классов r -того девизора T . Если существует гомометрия T на T' , то мы будем говорить, что пространство T' гомометрично пространству T .

Изометрией Φ ультраметрического пространства T на ультраметрическое пространство T' будем называть такую гомометрию, что прообраз каждого класса r -того девизора ($r = 0, 1, 2, \dots$) T' состоит из одного класса r -того девизора пространства T ; иначе говоря, Φ есть такое отображение T на T' , что для любых двух $a, b \in T$

$$d(a, b) = d'(\Phi(a), \Phi(b)) \quad (\text{где } d \text{ расстояние в } T, \text{ а } d' \text{ расстояние в } T').$$

Такое отображение Φ автоматически одно-однозначно, т. к. из $\Phi(a) = \Phi(b)$ следует

$$0 = d'(\Phi(a), \Phi(b)) = d(a, b), \quad \text{т. е. } a = b.$$

Нам чаще всего придется рассматривать изометрии пространства T на самое себя. В таком случае мы будем просто говорить об изометриях пространства T . Совокупность изометрий пространства T образует группу, которую мы будем обозначать через $\Xi(T)$.

Ультраметрическое пространство T будет называться конечным и однородным, если последовательность его девизоров J_r вместо II D удовлетворяет более сильному условию

III D: Для каждого r существует целое число n_r , такое что каждый класс из T/J_r является объединением n_{r+1} классов из T/J_{r+1} . n_{r+1} будет называться индексом J_{r+1} в J_r , а последовательность (n_1, n_2, \dots) — последовательностью индексов пространства T .

Теорема 1. Если T ультраметрическое конечное и однородное пространство, то его группа изометрий $\Xi(T)$ полуконечна.

Доказательство. Всякая изометрия, в силу своего определения, индуцирует, для каждого r , однозначное отображение T/J_r на самое себя, т. е. подстановку конечного множества T/J_r . Пусть будет $\mathfrak{N}^{(r)}$ совокупность изометрий индуцирующих в T/J_r тождественную подстановку. $\mathfrak{N}^{(r)}$ подгруппа $\Xi(T)$ и $\Phi_r \in \mathfrak{N}^{(r)}$ характеризуется соотношением $d(\Phi_r(a), a) \leq \eta^r$, для всякого $a \in T$. $\mathfrak{N}^{(r)}$ инвариантна в $\Xi(T)$, ибо для каждого Φ в $\Xi(T)$ и

для каждого $a \in T$ имеет место

$$d(\Phi \Phi_r \Phi^{-1}(a), a) = d(\Phi^{-1}(\Phi \Phi_r \Phi^{-1}(a)), \Phi^{-1}(a)) = d(\Phi_r(\Phi^{-1}(a)), \Phi^{-1}(a)) \leq r^r.$$

$\Phi, \Phi' \in \Xi(T)$ лежат в том-же классе $\text{mod } \mathfrak{M}^{(r)}$ тогда и только тогда, если они индуцируют ту-же подстановку в $T \setminus r$. Тем самым, для каждого r группа $\Xi(T) \mathfrak{M}^{(r)}$ конечна, ибо она изоморфна группе подстановок конечного множества.

Пусть $\Psi \in \bigcap_r \mathfrak{M}^{(r)}$. Тогда для каждого $a \in T$ и для каждого целого r

$$d(\Psi(a), a) \leq r^r,$$

т. е. $d(\Psi(a), a) = 0$, и тем самым, в силу II U

$$\Psi(a) = a,$$

что показывает, что $\Psi = 1(\Xi(T))$. Мы видим, что $\bigcap_r \mathfrak{M}^{(r)} = 1(\Xi(T))$. $[(\mathfrak{M}^{(r)})]$ цепочка группы $\Xi(T)$ и $\Xi(T)$ полуконечна, ч. и. т. д.

Цепочка $[(\mathfrak{M}^{(r)})]$ группы $\Xi(T)$, определённая в доказательстве Теоремы 1, будет называться канонической цепочкой. Впредь мы будем рассматривать группу $\Xi(T)$ как полуконечную ультраметрическую группу с ультраметрикой, определённой канонической цепочкой.

Пусть \mathfrak{H} и \mathfrak{H}' две ультраметрические группы. Мы будем говорить, что \mathfrak{H}' гомоморфна \mathfrak{H} , если существует отображение η \mathfrak{H} на \mathfrak{H}' , которое одновременно является гомоморфизмом абстрактной группы \mathfrak{H} на \mathfrak{H}' и гомометрией пространства \mathfrak{H} на \mathfrak{H}' . Если-же существует отображение Φ \mathfrak{H} на \mathfrak{H}' , которое является изоморфизмом абстрактной группы \mathfrak{H} на \mathfrak{H}' и изометрией пространства \mathfrak{H} на \mathfrak{H}' , то группы \mathfrak{H} и \mathfrak{H}' будет считаться изоморфными.

Если транзитивная подгруппа \mathfrak{H} группы $\Xi(T)$ гомоморфна в вышеуказанном смысле данной ультраметрической группе \mathfrak{H} , то мы будем называть \mathfrak{H} представлением группы \mathfrak{H} (изометриями ультраметрического пространства T). Если \mathfrak{H} изоморфна \mathfrak{H} , то мы будем говорить о точном представлении ультраметрической группы \mathfrak{H} .

Пусть (\mathfrak{G}) будет ультраметрической группой и $[(\mathfrak{M}^{(r)})]$ её цепочкой. Установим все представления (\mathfrak{G}) .

Если \mathfrak{H} подгруппа группы (\mathfrak{G}) , то мы будем обозначать через $(\mathfrak{G}) \mathfrak{H}$ совокупность (правых) классов $A \mathfrak{H} \text{ mod } \mathfrak{H}$. Для $r = 0, 1, 2, \dots$ классы $A \mathfrak{M}^{(r)} \mathfrak{H} \text{ mod } \mathfrak{M}^{(r)} \mathfrak{H}$ образуют, очевидно, последовательность разложений $(\mathfrak{G}) \mathfrak{H}$ на попарно не пересекающиеся множества. Эта последовательность явно удовлетворяет условиям ID и IID. Покажем, что она также удовлетворяет условию IID и укажем соответствующие индексы n_r . Для этого мы должны установить число классов $A \mathfrak{M}^{(r+1)} \mathfrak{H}$, содержащихся в одном классе $B \mathfrak{M}^{(r)} \mathfrak{H}$. Как видно, для $K, K' \in \mathfrak{M}^{(r)}$, $AK \mathfrak{M}^{(r+1)} \mathfrak{H}$ и $AK' \mathfrak{M}^{(r+1)} \mathfrak{H}$, лежащие в одном и том-же классе $\text{mod } \mathfrak{M}^{(r)} \mathfrak{H}$, совпадают тогда и только тогда, если

$$AK' \in AK \mathfrak{M}^{(r+1)} \mathfrak{H},$$

откуда следует $K^{-1}K' \in \mathfrak{M}^{(r+1)}\mathfrak{H}$, т. е.

$$K^{-1}K' \in \mathfrak{M}^{(r)} \cap \mathfrak{M}^{(r+1)}\mathfrak{H}.$$

Тем самым искомое число n_{r+1} равняется индексу

$$n_{r+1} = (\mathfrak{M}^{(r)} : \mathfrak{M}^{(r)} \cap \mathfrak{M}^{(r+1)}\mathfrak{H}).$$

Из этого видно также, что если $[(\mathfrak{M}^{(r)})]$ p -цепочка, то для всякого r n_r степень числа p .

Покажем наконец, что последовательность разложений $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$ на классы $A\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$ удовлетворяет условию III D в том и только в том случае, если подгруппа \mathfrak{H} замкнута в (\mathfrak{G}) .

Действительно, условие необходимо: пусть будет $A\mathfrak{H}$ класс $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$ отличный от \mathfrak{H} . Вследствие условия III D должны существовать такие целые числа r , что $\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$ не содержит $A\mathfrak{H}$. Поэтому $\bigcap_r \mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H} = \bigcap_r \mathfrak{H}\mathfrak{M}^{(r)} = \mathfrak{H}$ и \mathfrak{H} замкнута в силу Леммы 3.

Если наоборот \mathfrak{H} замкнута, то $\mathfrak{H} = \bigcap_r \mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$. Пусть будут $A\mathfrak{H}$ и $B\mathfrak{H}$ два разных класса из $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$, и пусть будет r такое целое число, что $\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$ не содержит $B^{-1}A\mathfrak{H}$. Но тогда $B\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H} \not\subset A\mathfrak{H}$.

Когда мы впредь будем рассматривать $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$ как ультраметрическое пространство, то будет подразумеваться, что дело идет об ультраметрике, определённой последовательностью разложений $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$ на классы $\text{mod } \mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$.

Таким образом, мы доказали:

Лемма 4. Для ультраметрической группы (\mathfrak{G}) и для замкнутых, и только для замкнутых подгрупп \mathfrak{H} группы (\mathfrak{G}) , разложение на классы $A\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) определяет на $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$ структуру ультраметрического пространства.

Замечание I. Если \mathfrak{H} единица группы (\mathfrak{G}) , то ультраметрическое пространство $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H} = (\mathfrak{G})$ совпадает с пространством, определённым цепочкой $[(\mathfrak{M}^{(r)})]$.

Замечание II. Для замкнутой подгруппы \mathfrak{H} группы (\mathfrak{G}) , отображение $A \rightarrow A\mathfrak{H}$ (\mathfrak{G}) на $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$ отображает класс $C\mathfrak{M}^{(r)}$ на $C\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$ и, с другой стороны, прообраз в (\mathfrak{G}) класса $C\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$ является объединением классов $\text{mod } \mathfrak{M}^{(r)}$. Поэтому, указанное отображение — гомометрия пространства (\mathfrak{G}) на пространство $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$.

Известно, что если абстрактная группа $(\mathfrak{G})'$ гомоморфна абстрактной группе (\mathfrak{G}) , то $(\mathfrak{G})'$ изоморфна факторгруппе $(\mathfrak{G})/\mathfrak{D}$, где \mathfrak{D} инвариантная подгруппа группы (\mathfrak{G}) — прообраз единицы группы $(\mathfrak{G})'$. Канонический гомоморфизм группы (\mathfrak{G}) на $(\mathfrak{G})/\mathfrak{D}$ осуществляется отображением $A \rightarrow A\mathfrak{D}$ $(A \in (\mathfrak{G}))$. Если (\mathfrak{G}) ультраметрическая группа, то в силу Леммы 4 и Замечания II этот гомоморфизм является одновременно гомометрией в том и только в том случае, если нормальный делитель \mathfrak{D} замкнут в (\mathfrak{G}) . Этим доказывается

Лемма 5. Ультраметрическая группа $(\mathfrak{G})'$ гомоморфна ультраметрической группе (\mathfrak{G}) , тогда и только тогда если она изоморфна факторгруппе $(\mathfrak{G})/\mathfrak{I}$ группы (\mathfrak{G}) по замкнутому нормальному делителю \mathfrak{I} .

Пусть \mathfrak{H} подгруппа группы (\mathfrak{G}) . Если каждому элементу $A \in (\mathfrak{G})$ сопоставить подстановку

$$X\mathfrak{H} \rightarrow AX\mathfrak{H}$$

множества $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$, то, как известно, совокупность этих подстановок образует представление абстрактной группы (\mathfrak{G}) . Будем записывать это представление через $\mathfrak{I}(\mathfrak{G}; (\mathfrak{G})/\mathfrak{H})$.

Известно, что, вплоть до подобия, все транзитивные представления абстрактной группы (\mathfrak{G}) могут быть получены таким образом.

Если (\mathfrak{G}) ультраметрическая группа, а \mathfrak{H} замкнутая подгруппа группы (\mathfrak{G}) , то мы можем рассматривать $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$ как ультраметрическое пространство. В этом случае, для всякого целого r и для всякого элемента $A \in (\mathfrak{G})$ подстановка $X\mathfrak{H} \rightarrow AX\mathfrak{H}$ отображает каждый класс $X'\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$ на класс $AX'\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$. Таким образом, эта подстановка является изометрией пространства $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{I}(\mathfrak{G}; (\mathfrak{G})/\mathfrak{H})$ есть подгруппа группы $\Xi(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$.

Положим $\mathfrak{H}^* = \bigcap_{C \in (\mathfrak{G})} C\mathfrak{H}C^{-1}$. $\mathfrak{I}(\mathfrak{G}; (\mathfrak{G})/\mathfrak{H})$ изоморфна, как абстрактная группа, факторгруппе $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}^*$; причём изоморфизм осуществляется соответствием

$$A \mapsto (X\mathfrak{H} \rightarrow AX\mathfrak{H}) \longleftrightarrow A\mathfrak{H}^*/\mathfrak{H}^*.$$

Будем рассматривать $\mathfrak{I}(\mathfrak{G}; (\mathfrak{G})/\mathfrak{H})$ как ультраметрическую группу и обозначим её каноническую цепочку через $[(\mathfrak{I}^{(r)}(\mathfrak{G}; (\mathfrak{G})/\mathfrak{H}))]$. В силу определения канонической цепочки, изометрия $A \mapsto (X\mathfrak{H} \rightarrow AX\mathfrak{H})$ принадлежит к $\mathfrak{I}^{(r)}(\mathfrak{G}; (\mathfrak{G})/\mathfrak{H})$ в том и только в том случае, если она сохраняет все классы $\text{mod } \mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы A принадлежал к $\bigcap_{C \in (\mathfrak{G})} C\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}C^{-1} = \mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}^*$. Но $[(\mathfrak{M}^{(r)}\mathfrak{H}^*)]$ является как раз цепочкой группы $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}^*$ и поэтому отображение

$$A \mapsto (X\mathfrak{H} \rightarrow AX\mathfrak{H}) \longleftrightarrow A\mathfrak{H}^*/\mathfrak{H}^*$$

изометрия пространства $\mathfrak{I}(\mathfrak{G}; (\mathfrak{G})/\mathfrak{H})$ на пространство $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}^*$. Таким образом, ультраметрическая группа $\mathfrak{I}(\mathfrak{G}; (\mathfrak{G})/\mathfrak{H})$ изоморфна ультраметрической группе $(\mathfrak{G})/\mathfrak{H}^*$ и является представлением ультраметрической группы (\mathfrak{G}) . Это представление точное, если $\mathfrak{H}^* = 1(\mathfrak{G})$.

Регулярным представлением (\mathfrak{G}) называется то, которое получается вышеуказанным образом, если за подгруппу \mathfrak{H} взять единицу $1(\mathfrak{G})$ группы (\mathfrak{G}) .

Пусть будет \mathfrak{Q} ультраметрической p_x -группой с p -цепочкой $[(\mathfrak{M}^{(r)})]$. В силу изложенной теории представлений, \mathfrak{Q} обладает представлениями, являющимися группами изометрий конечных и однородных пространств с последовательностями индексов, которые суть степени p .

Если, в частности выбрать в \mathfrak{Q} главную p -цепочку и рассматривать соответствующую ультраметрику \mathfrak{Q} , то можно получить представления \mathfrak{Q} как группы изометрий ультраметрических пространств с последовательностью индексов типа (p, p, \dots) . Такие пространства мы будем называть p -пространствами. Среди таких представлений всегда имеются и точные — например регулярное представление.

§ 4. ПРОСТРАНСТВА КАНТОРА И ГРУППЫ КАНТОРА

Метрическое пространство полно, если в нём любая последовательность Коши имеет предел.

Конечное и однородное ультраметрическое полное пространство назовем пространством Кантора. p -пространством Кантора мы будем называть пространство Кантора с последовательностью индексов типа (p, p, \dots, p, \dots) .

Ультраметрическую группу, пространство которой является пространством Кантора, назовём группой Кантора. Если группа Кантора является p_x -группой, мы будем называть её p -группой Кантора.

В силу известных результатов Ван Данцига о пополнении метрических групп, любая ультраметрическая группа может быть (и притом однозначным образом) пополнена до группы Кантора.

Пусть $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(r)}, \dots$ последовательность конечных множеств $N^{(r)}$. Предположим, что $N^{(r)}$ состоит из n_r элементов, которые мы будем обозначать через ξ_r . Прибавим к этой последовательности вспомогательное множество $N^{(0)}$ из одного единственного элемента ξ_0 . В теоретико-множественном произведении $N = \prod_{v=0}^{\infty} N^{(v)}$ введем ультраметрическое расстояние d_N положив: 1. для двух разных элементов $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r, \dots)$ и $\xi' = (\xi'_0, \xi'_1, \dots, \xi'_r, \dots)$ из N , $d_N(\xi, \xi') = q^{-m}$, где $m+1$ есть наименьшее такое число, что $\xi_{m+1} \neq \xi'_{m+1}$ и 2. $d_N(\xi, \xi) = 0$ для всякого $\xi \in N$.

Нетрудно убедиться, что N пространство Кантора с последовательностью индексов $(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots)$.

Теорема 2. Два пространства Кантора T и T' изометричны тогда и только тогда, если их последовательности индексов совпадают.

Следствие. Пространство Кантора с последовательностью индексов $(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots)$ изометрично вышеопределённому пространству $N = \prod_{v=0}^{\infty} N^{(v)}$.

Доказательство теоремы: Условие необходимо. Действительно, предположим, что T и T' — изометричны. Изометрия T на T' — по своему определению, налагает одно-однозначно для всякого $v = 0, 1, 2, \dots$ каждый класс $T^{(v)} \in T$ на класс $T'^{(v)} \in T'$ и индуцирует поэтому одно-однозначное

отображение множества $T \mathcal{J}_r$ на множество $T' \mathcal{J}'_r$. Так как эти множества конечны, то они должны содержать одинаковое число элементов. Пусть $(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots)$ и $(n'_1, n'_2, \dots, n'_r, \dots)$ последовательности индексов пространств T и T' , тогда число элементов в $T \mathcal{J}_r$ — $n_1 n_2 \dots n_r$, а число элементов в $T' \mathcal{J}'_r$ — $n'_1 n'_2 \dots n'_r$. Так как это имеет место для $r = 0, 1, 2, \dots$ то отсюда следует, что $n_r = n'_r$. Условие достаточно. Для доказательства мы покажем, что если $(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots)$ последовательность индексов T , то T изометрично пространству $N = \prod_{r=0}^{\infty} N^{(r)}$ определенному выше.

Пусть $T^{(r)} \in T \mathcal{J}_r$. Согласно II' D $T^{(r)}$ распадается на n_{r+1} классов $T \mathcal{J}_{r+1}$. Выберем для $r = 0, 1, 2, \dots$ и для каждого элемента $T^{(r)} \in T \mathcal{J}_r$ одно-однозначное отображение $\psi_{T^{(r)}}$ множества классов $\dot{T}^{(r+1)}$ содержащихся в $T^{(r)}$ на множество $N^{(r+1)}$. Тогда $\psi_{T^{(r)}}(\dot{T}^{(r+1)}) = \xi_{r+1}$, где $\xi_{r+1} \in N^{(r+1)}$. Положим $\psi(T^{(0)}) = \xi_0$, $\xi_0 \in N^{(0)}$.

Рекуррентно по r построим теперь следующим образом одно-однозначное отображение q_r множеств $T \mathcal{J}_r$ на множество $\prod_{\lambda=1}^r N^{(\lambda)}$ r -отрезков элементов N :

1. Положим $q_0(T^{(0)}) = \psi(T^{(0)}) = \xi_0$.

2. Предположим, что мы уже определили отображение q_r множества $T \mathcal{J}_r$ на множество $\prod_{\lambda=0}^r N^{(\lambda)}$. Тогда для каждого $T^{(r)} \in T \mathcal{J}_r$ $q_r(T^{(r)})$ является элементом $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r)$ множества $\prod_{\lambda=0}^r N^{(\lambda)}$. Если $\dot{T}^{(r+1)} \in T \mathcal{J}_{r+1}$ класс содержащийся в $T^{(r)}$ и если $\psi_{T^{(r)}}(\dot{T}^{(r+1)}) = \xi_{r+1}$, то мы положим

$$q_{r+1}(\dot{T}^{(r+1)}) = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r, \xi_{r+1}).$$

Поступая так с каждым классом из $T \mathcal{J}_r$, мы определим отображение q_{r+1} множества $T \mathcal{J}_{r+1}$ на множество $\prod_{\lambda=0}^{r+1} N^{(\lambda)}$, которое будет, очевидно, одно-однозначным.

Пусть $y = (r_0, r_1, \dots, r_r, \dots)$ элемент N . Для всякого $r = 0, 1, 2, \dots$ $q_r^{-1}(r_0, r_1, \dots, r_r)$ есть класс $U^{(r)} \in T \mathcal{J}_r$ и согласно построению q_r , $U^{(r+1)} \subset U^{(r)}$. Определяемый сходящейся последовательностью множеств $U^{(0)}, U^{(1)}, \dots, U^{(r)}, \dots$ элемент из T мы ставим в соответствии элементу $y \in N$.

Легко видеть, что этим устанавливается взаимно-однозначное отображение пространства N на пространство T . Согласно определению ультраметрики, это отображение будет изометрией, ч. и. т. д.

Теорема 3. Группа изометрий Кантора пространства T с последовательностью индексов $(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots)$ является метасимметрической группой $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots}$ метастепени $(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots)$.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из Теоремы 2 и последующего следствия. Действительно, пространство T изометрично пространству $N = \prod_{\lambda=0}^{\infty} N^{(\lambda)}$, где классы $N \cdot J_r^{(N)}$ по r -тому дивизору $J_r^{(N)}$ являются как раз подмножествами элементов из N с совпадающими r -отрезками. Изометрия пространства N есть любая подстановка множества такая, что для каждого $r = 0, 1, 2, \dots$ она отображает класс из $N \cdot J_r^{(N)}$ на класс того же множества. Согласно изложенному в § 2, эти подстановки как раз элементы мета-симметрической группы $\Xi_{n_1, n_2, \dots}$, ч. и. т. д.

Пусть $[g_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})]$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) таблицы представляющие элементы из $\Xi_{n_1, n_2, \dots}$ ($(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \in \prod_{\lambda=1}^{r-1} N^{(\lambda)}$ и $g_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ отображение $\prod_{\lambda=1}^{r-1} N^{(\lambda)}$ в симметрическую группу подстановок множества $N^{(n)}$). Такая таблица сохраняет все классы из $N \cdot J^{(n)}$ тогда и только тогда, если для $\mu \leq r$ $g_\mu(x_1, x_2, \dots, x_{\mu-1}) \equiv 1 (\Xi_{n_\mu})$, т. е. если $g_\mu(x_1, x_2, \dots, x_{\mu-1})$ отображение, тождественно равное тождественной подстановке множества $N^{(n_\mu)}$. Совокупность таких подстановок является инвариантной подгруппой $\mathfrak{A}^{(n)}$ группы $\Xi_{n_1, n_2, \dots}$ и $[(\mathfrak{A}^{(n)})]$ есть как раз та каноническая цепочка группы $\Xi_{n_1, n_2, \dots}$, которая по условию прошлого параграфа определяет ультраметрику в $\Xi_{n_1, n_2, \dots}$.

Согласно закону умножения таблиц подстановок (1, 6), две таблицы находятся в том-же классе $\text{mod } \mathfrak{A}^{(n)}$ тогда и только тогда, если их первые r координат совпадают. Если мы обозначим через $I^{(r)}$ множество всех отображений $\prod_{\lambda=1}^r N^{(\lambda)}$ в симметрическую группу Ξ_{n_r} множества $N^{(n)}$, то видно, что $\Xi_{n_1, n_2, \dots}$ изометрично пространству $\prod_{r=1}^{\infty} I^{(r)}$ с соответствующей ультраметрикой. Это показывает, что ультраметрическое пространство группы $\Xi_{n_1, n_2, \dots}$ является пространством Кантора с последовательностью индексов $(n_1!, (n_1!)^{n_1}, (n_2!)^{n_1 n_2}, \dots)$. Группа $\Xi_{n_1, n_2, \dots}$ есть следовательно группа Кантора.

Перейдём теперь к частному случаю p -пространства Кантора — пространство, которое мы обозначим через E_x . Группа изометрий этого пространства есть метасимметрическая группа $\Xi_{p, p, \dots}$ метастепени (p, p, \dots) . Согласно Теореме 2, можно рассматривать E_x как пространство $\prod_{\lambda=0}^{\infty} E^{(\lambda)}$, где для $\lambda = 1, 2, \dots$, множества $E^{(\lambda)}$ состоят из p элементов, а множество $E^{(0)}$ состоит из одного элемента ξ_0 . Выберем за $E^{(\lambda)}$ множество элементов поля Галуа G_p , состоящего из p элементов. Таким образом, E_x становится векторным пространством счетного измерения с основным полем G_p , т. е. E_x — множество векторов $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ (где ξ_0 — фиксированный эле-

мент, а ξ_λ , $\lambda = 1, 2, \dots$ пробегают независимо друг от друга элементы поля G_p с ультраметрикой, определённой девизорами $J^{(K_x)}$, такими что для $X = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$, $Y = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots)$

$$X \equiv Y \pmod{J^{(K_x)}}$$

тогда и только тогда, если $\xi_\lambda = \eta_\lambda$ для $\lambda \leq p$.

Обозначим через $[a]^{(v)} (a \in G_p)$ циклическую подстановку $p \rightarrow p + a$ множества $E^{(v)}$, а через $[G_p]^{(v)}$ — совокупность таких подстановок. При этом обозначение для произведения двух циклических подстановок имеем

$$[a]^{(v)} [b]^{(v)} = [a + b]^{(v)},$$

и $[G_p]^{(v)}$ является циклической группой порядка p .

Пусть \mathfrak{F}_x — полное произведение групп $[G_p]; \mathfrak{F}_x = \prod_{r=1}^{\infty} [G_p]^{(v)}$. \mathfrak{F}_x является группой некоторых изометрий пространства E_x , и при нашем обозначении, таблицы подстановок, соответствующие элементам этой группы, пишутся в виде $[a_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})]$, где $a_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) суть функции со значениями в G_p , определённые на пространствах E_{r-1} ($r-1$)-отрезков элементов E_x . Закон произведения этих таблиц, частный случай общего закона (1, 6), следующий:

$$(4, 1) \quad [a_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})] [b_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})] = [a_r(x_1 + b, x_2 + b(x_1), \dots, x_{r-1} + b(x_1, x_2, \dots, x_{r-2})) + b_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})].$$

Единицей \mathfrak{F}_x является таблица, где все $a_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ тождественно равны 0. Для каждой таблицы $[a_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})]$ обратная таблица $[a_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})]^{-1}$ равна

$$(4, 2) \quad [a_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})]^{-1} = [-a_r(x_1 - a, x_2 - a(x_1 - a), \dots)].$$

Пусть \mathfrak{T}_s — группа таблиц из \mathfrak{F}_x , s первых координат которых тождественно равны 0. Мы будем говорить, что эти таблицы глубины s . \mathfrak{T}_s — инвариантная подгруппа группы \mathfrak{F}_x всех изометрий, сохраняющих классы $E_x J^{(K_x)}$, т. е. $\mathfrak{T}_s = \mathfrak{F}_x \cap \mathfrak{M}^{(v)}$, и $\{(\mathfrak{T}_r)\}$ — каноническая цепочка группы \mathfrak{F}_x .

$$(4, 3) \quad A = [a_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})] \equiv B = [b_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})] \pmod{\mathfrak{T}_s}$$

тогда и только тогда, если первые s координат этих таблиц совпадают.

Обозначим через $\Xi^{(v)}$ множество всех отображений $a_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ E_{r-1} в G_p , тогда ультраметрическое пространство группы \mathfrak{F}_x изометрично пространству $\prod_{r=0}^{\infty} \Xi^{(v)}$, т. е. \mathfrak{F}_x — группа Кантора с последовательностью индексов (p, p^v, p^{p^2}, \dots) . Тем самым:

Все вышесказанное является непосредственным обобщением теории, изложенной в работе KALOUJNINE [1].

1. \mathfrak{F}_x является p_x -группой.

2. \mathfrak{F}_x — замкнутая подгруппа группы $\Xi_{p, p, p, \dots}$. (Ибо \mathfrak{F}_x полное подпространство $\Xi_{p, p, p, \dots}$).

$$\mathfrak{F}_x \mathfrak{M}^{(n)} \mathfrak{M}^{(n)} \sim \mathfrak{F}_x \mathfrak{D}_r \sim \mathfrak{F}_r = \prod_{\sigma=1}^n [G_p]^{(\sigma)},$$

и тем самым $\mathfrak{F}_x \mathfrak{M}^{(n)} \mathfrak{M}^{(n)}$ является силовской p -подгруппой группы $\Xi_{p, p, p, \dots} \mathfrak{M}^{(n)} \sim \Xi_{p, p, p, \dots, p}$.

Из результатов ван Даницга^{*}, а также из более общих результатов Куроши⁹ вытекает, что в силу свойств 1—3, группа \mathfrak{F}_x является максимальной p_x -подгруппой группы $\Xi_{p, p, p, \dots}$ и что все максимальные p -подгруппы группы $\Xi_{p, p, p, \dots}$ изоморфны между собой.

В прошлом параграфе мы видели, что всякая p_x -группа обладает точным представлением изометриями p -пространств.

Если \mathfrak{H} p_x -группа Кантора, то она обладает точными представлениями изометриями p -пространства Кантора, т. е. $\Xi_{p, p, p, \dots}$ содержит замкнутую подгруппу \mathfrak{H}' , изоморфную \mathfrak{H} . \mathfrak{H}' также замкнутая подгруппа некоторой максимальной p_x -подгруппы \mathfrak{C} группы $\Xi_{p, p, p, \dots}$, и в силу вышесказанного группа \mathfrak{C} изоморфна группе \mathfrak{F}_x . Этим показано, что любая p_x -группа Кантора изоморфна (по крайней мере одной) замкнутой подгруппе группы \mathfrak{F}_x .

Наконец, если \mathfrak{H} произвольная p_x -группа, не обязательно полная, то её всегда можно погрузить в p_x -группу Кантора \mathfrak{H} , и, так как \mathfrak{H} изоморфна некоторой подгруппе группы \mathfrak{F}_x , то и группа \mathfrak{H} изоморфна некоторой подгруппе этой группы. Таким образом,

для всякой p_x -группы \mathfrak{H} , \mathfrak{F}_x содержит подгруппу, изоморфную \mathfrak{H} . С другой стороны, группа \mathfrak{F}_x сама p_x -группа; так что, если \mathfrak{K} -группа, которая содержит для любой p_x -группы \mathfrak{H} подгруппу \mathfrak{H}' , изоморфную \mathfrak{H} , то \mathfrak{K} содержит также в частности подгруппу изоморфную \mathfrak{F}_x . В этом смысле группа \mathfrak{F}_x есть универсальная группа для p_x -групп.¹⁾

§ 5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ \mathfrak{F}_x

В предыдущем параграфе мы охарактеризовали группу \mathfrak{F}_x как силовскую p_x -подгруппу группы изометрий p -пространства Кантора. Мы видели, кроме того, что \mathfrak{F}_x допускает (каноническую) ультраметрику, соответствующую цепочке $[(\mathfrak{D}.)]$, где \mathfrak{D}_s подгруппа таблиц глубины $\leq s$. Относительно этой ультраметрики \mathfrak{F}_x является группой Кантора, и для каждого $s = 0, 1, 2, \dots$ фактор-группа $\mathfrak{F}_x / \mathfrak{D}_s$ изоморфна группе \mathfrak{F}_x таблиц ранга s .

* См. 3.

⁹ См. 4.

¹⁾ \mathfrak{F}_x не единственная универсальная в этом смысле p_x -группа. Легко дать примеры других таких групп, не изоморфных группе \mathfrak{F}_x .

В этом параграфе мы обобщим результаты о характеристических подгруппах групп \mathfrak{F}_x , установленных в работе KALOUJNINE [1], на случай группы \mathfrak{F}_x .

Резюмируем сначала то, что было доказано в цитируемой работе для характеристических подгрупп групп \mathfrak{F}_m .

Группа \mathfrak{F}_m является полным произведением циклических групп порядка p и может быть представлена в виде группы таблиц

$$(5, 1) \quad A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \dots, a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})] = [a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})],$$

(где для $r = 1, 2, \dots, m$ $a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ — функции, аргументы и значения которых пробегает поле Галуа G_p) с законом умножения:¹¹

$$(5, 2) \quad AB = [a, a(x_1), \dots, a(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})] [b, b(x_1), \dots, b(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})] = \\ = [a + b, a(x_1 + b) + b(x_1), \dots, a(x_1 + b, x_2 + b(x_1), \dots, x_{m-1} + \\ + b(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})) + b(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})].$$

Функции $a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ можно рассматривать как многочлены от переменных x_1, x_2, \dots, x_{r-1} с коэффициентами из G_p , при том такие, что их степень относительно каждой из переменных не превосходит $p-1$. (Такие многочлены мы будем называть приведёнными). Действительно, чтобы привести $a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ к такому виду, достаточно применить формулу Лагранжа:

$$(5, 3) \quad a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) = \\ = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}) \in G_p \times G_p \times \dots \times G_p} \frac{x_1 - x_1^p}{x_1 - \alpha_1} \cdot \frac{x_2 - x_2^p}{x_2 - \alpha_2} \dots \frac{x_{r-1} - x_{r-1}^p}{x_{r-1} - \alpha_{r-1}} a(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}).$$

С другой стороны, известно, что два многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ и $g(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ из кольца $G_p[x_1, x_2, \dots, x_{r-1}]$ многочленов переменных x_1, x_2, \dots, x_{r-1} определяют одну и ту-же функцию тогда и только тогда, если они сравнимы по модулю идеала $(x_1^p - x_1, x_2^p - x_2, \dots, x_{r-1}^p - x_{r-1})$. Тем самым представление функций приведёнными многочленами одно-однозначно. Поэтому мы впредь будем рассматривать функции $a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ как приведённые многочлены. При этом условии умножение таблиц по вышеуказанному закону проводится как рациональная операция в кольцах $G_p[x_1, x_2, \dots, x_{r-1}]$, после чего многочлены результата редуцируются mod $(x_1^p - x_1, x_2^p - x_2, \dots, x_{r-1}^p - x_{r-1})$ к приведённой форме.

¹¹ В работе KALOUJNINE [1] закон умножения таблиц определён в виде

$$[a, a(x_1), \dots, a(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})] [b, b(x_1), \dots, b(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})] = \\ = [a + b, a(x_1) + b(x_1 - a), \dots, a(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + b(x_1 - a, \dots, x_{m-1} + \\ + b(x_1 - a, \dots, x_{m-1} - a(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})))].$$

Это объясняется несколько иным определением таблиц в этой работе. Все приведённые там доказательства остаются дословно неизменными, если за закон умножения принять тот, который определён в настоящее время.

Введём в совокупности приведённых одночленов лексикографический порядок. С этой целью мы определяем высоту приведённого одночлена $X_i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{r-1}^{i_{r-1}}$ как число $h(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{r-1}^{i_{r-1}}) = 1 + i_1 + i_2 p + \dots + i_{r-1} p^{r-2}$. Если многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ является суммой $\sum c_\lambda X_\lambda$ различных одночленов X_λ , то за высоту $h(f(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}))$ многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ мы принимаем наибольшее из чисел λ таких, что $c_\lambda \neq 0$.

Для таблицы $A = [a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})]$ мы обозначаем через $|A|_r$ высоту её r -той координаты $a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$, а последовательность целых чисел $\langle |A|_1, |A|_2, \dots, |A|_m \rangle$ мы называем индикатрисой таблицы A и обозначаем её через $|A|$. (Легко видеть, что $0 \leq |A|_r \leq p^{r-1}$. С другой стороны, всякая последовательность $K = \langle k_1, k_2, \dots, k_m \rangle$ целых чисел $0 \leq k_r \leq p^{r-1}$ — индикатриса какой-то таблицы.)

В совокупности таблиц (и индикатрис) мы вводим частичную упорядоченность, положив $|A| \leq |B|$ тогда и только тогда, если для каждого $r = 1, 2, \dots, m$, $|A|_r \leq |B|_r$.

В работе KALOUJNINE [1] доказывается следующее:

1. Если $K = \langle k_1, k_2, \dots, k_m \rangle$ индикатриса, то совокупность таблиц $A \in \mathfrak{F}_m$ таких, что $|A| \leq K$ образует подгруппу группы \mathfrak{F}_m .

Такую подгруппу мы называем параллелотопической подгруппой (сокращено Г. П.), а последовательность K — индикатрисой этой Г. П.

Ясно, что Г. П. вполне определяется своей индикатрисой.¹²

2. Г. П., вообще говоря, не инвариантные подгруппы группы. Но можно характеризовать те среди них, которые обладают этим свойством.

Если $K = \langle 0, 0, \dots, 0, k_{s+1}, k_{s+2}, \dots, k_m \rangle$ (где k_{s+1} первый неравный нулю член K) индикатриса Г. П. (\mathfrak{S}) , то подгруппа (\mathfrak{S}) инвариантна тогда и только тогда, если для $\sigma \leq s+1$ $k_\sigma \leq p^\sigma - p^{s-\sigma}$.

Инвариантные Г. П. мы обозначаем через Г. П. И.

3. Оказывается, что для $p \neq 2$ совокупность Г. П. И. совпадает с совокупностью характеристических подгрупп \mathfrak{F}_m .¹³

Можно установить индикатрисы различных характеристических подгрупп, определённых внутренними свойствами группы \mathfrak{F}_m . Так, например, μ -тый член нисходящего центрального ряда имеет индикатрису

$$(5, 4) \quad \langle (1-\mu)^+, (p-\mu)^+, (p^2-\mu)^+, \dots, (p^{m-1}-\mu)^+ \rangle$$

(где $(a)^+ = \max(a, 0)$). Оказывается, что в группе \mathfrak{F}_m нисходящий и восходящий центральные ряды совпадают.

¹² Легко видеть, что совокупность Г. П. образует дистрибутивную структуру. Этот факт в неявном виде неоднократно употребляется в работе.

¹³ Для $p = 2$ это утверждение неверно.

Все вышеуказанные результаты легко обобщаются на случай группы $\mathbb{F}_x(p+2)$, если мы будем рассматривать \mathbb{F}_x как ультраметрическую группу с канонической метрикой и условимся:

а. Рассматривать только замкнутые подгруппы группы \mathbb{F}_x .

б. Понимать под автоморфизмом группы \mathbb{F}_x только такие, которые сохраняют её ультраметрику т.е. сохраняют в целом все группы \mathbb{D}_n .¹⁴ Характеристическими подгруппами будем называть только такие замкнутые подгруппы \mathbb{F}_x , которые сохраняются при всех автоморфизмах в вышеуказанном смысле.

При этих условиях вышеуказанные результаты обобщаются следующим образом:

Также как в случае группы, мы принимаем за координаты таблицы $A = [a(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})] \in \mathbb{F}_x$ приведённые многочлены с коэффициентами из G_p и определяем таким же образом индикатрису $|A| = (|A|_1, |A|_2, \dots, |A|_p, \dots)$. Это бесконечная последовательность $K = \langle k_1, k_2, \dots, k_p, \dots \rangle$ целых рациональных чисел k_p , $0 \leq k_p < p^{p-1}$. Теми-же условиями, как и выше, мы определяем частичный порядок таблиц (и индикатрис).

1. Если $K = \langle k_1, k_2, \dots, k_p, \dots \rangle$ индикатриса, то совокупность таблиц $A \in \mathbb{F}_x$, таких что $|A| \leq K$, есть (замкнутая) подгруппа группы \mathbb{F}_x .

Действительно, обозначим через $(\mathbb{G}_K$ совокупность таблиц, удовлетворяющих вышеуказанному условию. Тогда для каждого $s = 0, 1, 2, \dots$ $\mathbb{G}_K \mathbb{D}_s$ есть совокупность всех таблиц A' , таких, что $|A'| = \langle k_1, k_2, \dots, k_s, p^s, p^{s+1}, \dots \rangle$, и $(\mathbb{G}_K \mathbb{D}_s \mathbb{D}_s)$ является Г. П. группы $\mathbb{F}_\infty \mathbb{D}_s \simeq \mathbb{F}_s$. $(\mathbb{G}_K \mathbb{D}_s)$ замкнутые подгруппы \mathbb{F}_x и тем-же свойством обладает их пересечение $\bigcap (\mathbb{G}_K \mathbb{D}_s) = (\mathbb{G}_K$.

Так-же, как и в случае группы \mathbb{F}_x , мы будем называть группу $(\mathbb{G}_K$ Г. П. группы \mathbb{F}_x , а последовательность K её индикатрисой.

2. Если $K = \langle 0, 0, \dots, 0, k_{s+1}, k_{s+2}, \dots \rangle$ (где k_{s+1} первый неравнулю член K) — индикатриса Г. П. (\mathbb{G}) группы \mathbb{F}_x , то подгрупп (\mathbb{G}) инвариантна в \mathbb{F}_x тогда и только тогда, если для $\sigma \geq s+1$ имеет место неравенство

$$k_\sigma \geq p^{\sigma-1} - p^s.$$

Действительно, условие достаточно. Если оно удовлетворяется, то для каждого $v = 0, 1, 2, \dots$ $(\mathbb{G} \mathbb{D}_v \mathbb{D}_v)$ — инвариантная подгруппа группы $\mathbb{F}_\infty \mathbb{D}_v$. Подгруппы $(\mathbb{G} \mathbb{D}_v)$ инвариантны в \mathbb{F}_x и тем-же свойством обладает и их пересечение (\mathbb{G}) .

С другой стороны, если подгруппа (\mathbb{G}) инвариантна в \mathbb{F}_∞ , то для каждого $v = 0, 1, 2, \dots$ подгруппа $(\mathbb{G} \mathbb{D}_v)$ инвариантна в \mathbb{F}_x , а $(\mathbb{G} \mathbb{D}_v \mathbb{D}_v)$ инва-

¹⁴ Остается открытым вопрос, не все-ли автоморфизмы абстрактной группы \mathbb{F}_x обладают этим свойством. В работе KALOUJNINE [1] было доказано, что в группе $\mathbb{F}_m \mathbb{D}_m$ характеристические подгруппы; но при доказательстве мы пользовались в неявном виде тем фактом, что m конечное число.

вариантна в $\mathbb{F}_x/\mathbb{D}_r = \mathbb{F}_r$. Но индикатрисой группа $\mathcal{G}\mathbb{D}_r/\mathbb{D}_r$ будет $0, 0, \dots, 0, k_{s+1}, \dots, k_r$, откуда мы видим, что указанное условие необходимо.

Как и в случае конечного m , инвариантные Г. П. группы \mathbb{F}_x мы обозначаем через Г. П. И.

3. Совокупность Г. П. И. группы $\mathbb{F}_x (p \neq 2)$ совпадает с совокупностью характеристических подгрупп ультраметрической группы \mathbb{F}_x .

Если (\mathcal{G}) характеристическая подгруппа, то для каждого $r = 0, 1, 2, \dots$ $(\mathcal{G})\mathbb{D}_r$, также характеристическая подгруппа группы \mathbb{F}_x (ибо \mathbb{D}_r характеристическая подгруппа по условию б). Покажем, что $(\mathcal{G})\mathbb{D}_r/\mathbb{D}_r$ является Г. П. И. группы $\mathbb{F}_x/\mathbb{D}_r \cong \mathbb{F}_r$.¹⁵

Пусть $W = (w_1, w_2, \dots, w_r, \dots)$ — бесконечная последовательность элементов $w_r \in G_r$, причём все $w_r \neq 0$. Определим отображение W группы \mathbb{F}_x в себя, положив для каждой таблицы $A \in \mathbb{F}_x$

$$(5, 5) \quad W(A) = W([a(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})]) = [w_r a(w_1^{-1} x_1, w_2^{-1} x_2, \dots, w_{r-1}^{-1} x_{r-1})].$$

Легко проверить, что W является автоморфизмом группы, допустимым в смысле условия б). Совокупность таких автоморфизмов образует абелеву группу \mathfrak{W} . Если (\mathcal{G}) характеристическая подгруппа группы \mathbb{F}_x , то для каждого $W \in \mathfrak{W}$ $W(\mathcal{G}) = (\mathcal{G})$. W индуцирует в $\mathbb{F}_x/\mathbb{D}_r \cong \mathbb{F}_r$ автоморфизм W_r , определённый аналогичным образом в \mathbb{F}_r для последовательности (w_1, w_2, \dots, w_r) , W_r сохраняет подгруппы $(\mathcal{G})\mathbb{D}_r/\mathbb{D}_r$ группы $\mathbb{F}_x/\mathbb{D}_r \cong \mathbb{F}_r$. Но в работе KALOUJNINE [1] было доказано, что инвариантная подгруппа группы \mathbb{F}_r , сохраняемая автоморфизмами W_r , является Г. П. И. группы \mathbb{F}_r . Поэтому подгруппа $(\mathcal{G})\mathbb{D}_r/\mathbb{D}_r$ есть Г. П. И. группы $\mathbb{F}_x/\mathbb{D}_r$ и подгруппа $(\mathcal{G})\mathbb{D}_r$ есть Г. П. И. группы \mathbb{F}_x . Но группа (\mathcal{G}) совпадает с пересечением групп $(\mathcal{G})\mathbb{D}_r$ (ибо (\mathcal{G}) замкнута в силу условий а) и б), и поэтому сама является Г. П. И. группы \mathbb{F}_x .

С другой стороны, если (\mathcal{G}) есть Г. П. И. группы \mathbb{F}_x , то тем-же свойством обладают и все $(\mathcal{G})\mathbb{D}_r$. $(\mathcal{G})\mathbb{D}_r/\mathbb{D}_r$ — Г. П. И. и следовательно характеристическая подгруппа группы \mathbb{F}_x . Но тогда и $(\mathcal{G}) \bigcap_r (\mathcal{G})\mathbb{D}_r$ — характеристическая подгруппа группы \mathbb{F}_x .

(Поступило 13. IV. 1951.)

¹⁵ Мы не можем непосредственно утверждать, что $(\mathcal{G})\mathbb{D}_r/\mathbb{D}_r$ характеристическая подгруппа группы $\mathbb{F}_x/\mathbb{D}_r$, ибо не ясно (и это даже неправильно), что любой автоморфизм группы $\mathbb{F}_x/\mathbb{D}_r$ может быть продолжен в автоморфизм группы \mathbb{F}_x . Это обстоятельство немного усложняет доказательство.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER p -SYLOWGRUPPEN SYMMETRISCHER GRUPPEN

L. KALOUJNINE (Berlin)

(Résumé)

In meiner Arbeit „La structure des p -groupes de Sylow des groupes symétriques finis“ (*Ann. Ec. Normale*, 3 (65), (1948), p. 239—176) wurden die Eigenschaften der p -Sylowgruppen \mathfrak{P}_m der symmetrischen Gruppen \mathfrak{S}_{p^m} des Grades p^m untersucht. Unter anderen sind dort die charakteristischen Untergruppen der Gruppen \mathfrak{P}_m bestimmt worden. Diese Untersuchungen sind mit Hilfe der Darstellungen der Gruppen \mathfrak{P}_m durch s. g. „Tabellen“ durchgeführt worden.

In der zitierten Arbeit wurde folgendes gezeigt: Ist G_p das Galoisfeld von p Elementen (p eine Primzahl), so sei $a(x_1, x_2, \dots, x_l)$ eine Funktion von l Variablen, deren Argument- und Wertbereich G_p ist. Als Tabelle des Ranges m bezeichnete ich eine Folge

$$A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \dots, a(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})]$$

von solchen Funktionen, wobei die erste Funktion eine Konstante $a \in G_p$ ist und allgemein die ν -te Funktion (—diese heißt die ν -te Koordinate von A) $a(x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1})$ von $\nu-1$ Variablen (aus G_p) abhängt. Definiert man eine Multiplikation der Tabellen durch die Festsetzung

$$\begin{aligned} & [a, a(x_1), \dots, a(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})] [b, b(x_1), \dots, b(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})] \\ &= [a+b, a(x_1+b) + b(x_1), \dots, a(x_1+b, x_2+b(x_1), \dots, x_{m-2}) + \\ & \quad + b(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})], \end{aligned}$$

so bildet die Menge der Tabellen eine Gruppe \mathfrak{P}_m . \mathfrak{P}_m ist eine p -Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_{p^m} des Grades p^m isomorph. Durch die Anwendung der Lagrangeschen Interpolationsformel lassen sich die Funktionen $a(x_1, x_2, \dots, x_k)$ als Polynome mit Koeffizienten aus G_p in den Variablen x_1, x_2, \dots, x_k schreiben, wobei der Grad in keiner der Variablen $p-1$ übersteigt. Nimmt man diese Schreibweise an, so kann die Multiplikation in der Gruppe \mathfrak{P}_m als rationale Operation in dem Polynombereich $G_p[x_1, x_2, \dots, x_{m-1}]$ aufgefaßt werden. Die Auswertung dieser Idee ergibt weitgehende Auskunft über die Struktur der Gruppe \mathfrak{P}_m .

Die vorliegende Arbeit ist der Gruppe \mathfrak{P}_∞ der unendlichen Tabellen

$$A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \dots, a(x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1}), \dots]$$

mit der Multiplikationsregel

$$\begin{aligned} & [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \dots] [b, b(x_1), b(x_1, x_2), \dots] \\ &= [a+b, a(x_1+b) + b(x_1), a(x_1+b, x_2+b(x_1)) + b(x_1, x_2), \dots] \end{aligned}$$

gewidmet. Die Gruppe \mathfrak{P}_∞ wird folgendermaßen als topologische Gruppe aufgefaßt: Die Menge \mathfrak{T}_s der Tabellen, deren s erste Koordinaten identisch Null sind, ist ein Normalteiler von \mathfrak{P}_∞ ; die Menge dieser Normalteiler \mathfrak{T}_s wählt man als ein fundamentales Umgebungssystem der Einheit von \mathfrak{P}_∞ . Versteht man unter charakteristischer Untergruppe von \mathfrak{P}_∞ eine abgeschlossene Untergruppe von \mathfrak{P}_∞ , die durch alle stetigen Automorphismen von \mathfrak{P}_∞ auf sich abgebildet wird, so können die Ergebnisse der oben angeführten Arbeit bezüglich der charakteristischen Untergruppen von \mathfrak{P}_m leicht auf den Fall der Gruppe \mathfrak{P}_∞ verallgemeinert werden.

Im Mittelpunkt der gesamten Arbeit steht der Begriff des vollständigen Produktes von Permutationsgruppen.

Das vollständige Produkt von zwei Permutationsgruppen \mathfrak{S} und \mathfrak{S}' der Mengen M und N wird als die Menge der Permutationen σ des mengentheoretischen Produktes $M \times N$ definiert, die folgenden Bedingungen genügen:

1. die Untermengen $\mu \times N$ von $M \times N$ mit einer festen ersten Koordinate $\mu \in M$ sind Imprimitivitätssysteme von σ ;
2. setzt man $\sigma(\mu \times N) = \sigma\mu \times N$, so gehört die Permutation $\mu \rightarrow \sigma\mu$ zu \mathfrak{G} ,
3. setzt man $\sigma(\mu, \nu) = (\mu', \nu')$, so ist für festes $\mu \in M$, $\nu \rightarrow \nu'$ eine Permutation aus \mathfrak{H} , die von μ als Parameter abhängt.¹

Man zeigt, daß die Menge solcher Permutationen eine Gruppe bildet, die ich das vollständige Produkt der Permutationsgruppen \mathfrak{G} und \mathfrak{H} nenne und mit $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}$ bezeichne.

Das vollständige Produkt ist assoziativ, d. h. es gilt für drei Permutationsgruppen: $(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{K} = \mathfrak{G} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{K})$. Man kann daher durch Rekurrenz das vollständige Produkt einer endlichen Folge von Permutationsgruppen erklären. Es ist sogar möglich das vollständige Produkt einer beliebigen wohlgeordneten Menge von Permutationsgruppen zu definieren.

Es stellt sich nun heraus, daß \mathfrak{P}_p das vollständige Produkt einer unendlichen Folge von zyklischen Gruppen der Ordnung p ist.

Es sei \mathfrak{S}_p die symmetrische Gruppe des Grades p . Man bilde das vollständige Produkt $\mathfrak{S}_{p, p, \dots}$ einer unendlichen Folge von Gruppen, die zu \mathfrak{S}_p isomorph sind. In der Gruppe $\mathfrak{S}_{p, p, \dots}$ läßt sich nun auf eine natürliche Weise eine Topologie erklären, die $\mathfrak{S}_{p, p, \dots}$ zu einer kompakten nulldimensionalen Gruppe macht. Es zeigt sich, daß \mathfrak{P}_p isomorph zu einer p -Sylowgruppe (im Sinne von VAN DANTZIG—A. KUROSCHE) von $\mathfrak{S}_{p, p, \dots}$ ist.

Eine Gruppe \mathfrak{G} soll p_x -Gruppe heißen, wenn sie eine Untergruppenreihe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \dots$$

besitzt, so daß

1. für jedes ν , $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_\nu)$ endlich und eine Primzahlpotenz p^{ν} ist, 2. $\bigcap_{\nu} \mathfrak{G}_\nu = 1(\mathfrak{G})$ ist.

Wir zeigen, daß \mathfrak{P}_∞ eine p_∞ -Gruppe ist und daß es zu jeder p_x -Gruppe \mathfrak{G} mindestens eine zu ihr isomorphe Untergruppe \mathfrak{G}' von \mathfrak{P}_x gibt. In diesem Sinne ist \mathfrak{P}_x eine universelle p_x -Gruppe.

¹ Näheres über das vollständige Produkt ist in der Arbeit M. KRASNER—L. KALOUJNINE. Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes, I. *Acta Scient. Math. Szeged*, **13** (1950), S. 208—230. Teil II. **14** (1951), S. 39—66; Teil III. **14** (1951), S. 69—82, enthalten.

О НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ*

К. К. МАРДЖАНИШВИЛИ (Москва)

Советская математика имеет блестящие достижения в самых разнообразных направлениях. Мне, как ученику крупнейшего советского математика — академика И. М. Виноградова, наиболее близка область теории чисел — область, в которой русские математики давно уже пользовались заслуженной известностью и которая, благодаря работам советских ученых, была подвергнута самым глубоким исследованиям. Не имея возможности, хотя бы вкратце, коснуться всех советских работ в области теории чисел я остановлюсь лишь на фундаментальных работах И. М. Виноградова, создавшего новый метод в аналитической теории чисел. В виде примера применения этого метода я разрешу себе коснуться и некоторых моих работ, непосредственно примыкающих к исследованиям И. М. Виноградова.

Основными задачами аддитивной теории чисел являются проблема Варинга и проблема Гольдбаха.

В 1770 г. Варинг высказал предположение, что всякое целое положительное N может быть представлено в виде

$$(1) \quad N = x_1^s + x_2^s + \dots + x_s^s,$$

где n заданное целое положительное число, x_1, x_2, \dots, x_s целые положительные и s не превосходит некоторой величины, зависящей лишь от n . Это утверждение Варинга было доказано в общем виде лишь в текущем столетии Д. Гильбертом. Однако, решение Гильберта было несовершенно; оно приводило к очень большим значениям s . В 1919 г. Харди и Литтлвуд дали новый метод решения проблемы Варинга. Пусть $G(n)$ представляет целое число, обладающее свойством, что все достаточно большие N представимы в форме (1) при $s \leq G(n)$, но существуют сколь угодно большие N , которые непредставимы в форме (1) при $s < G(n)$. Харди и Литтлвуд показали, что $G(n)$ представляет величину, порядок которой не превосходит $n \cdot 2^n$, а также нашли асимптотическую формулу для числа представлений N в форме (1).

* Доклад, прочитанный в ноябре 1950 года на сессии Отделения Математических и естественных наук Венгерской Академии Наук.

Независимо от Харди и Литтльвуда академик И. М. Виноградов в своей опубликованной в 1924 г. работе пришел к асимптотической формуле, аналогичной формуле этих ученых. Метод, примененный тогда академиком И. М. Виноградовым для исследования проблемы Варинга, значительно превосходил метод Харди—Литтльвуда в отношении простоты и обзорности. При этом И. М. Виноградовым были использованы оценки так называемых тригонометрических сумм, т. е. сумм вида

$$(2) \quad \sum_{Q \leq x < Q+P} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)$ —некоторая функция от x (в частности, целая рациональная функция) и x пробегает последовательность целых чисел. И. М. Виноградов показал, что вопрос о наименьшем числе слагаемых, необходимом для вывода асимптотической формулы в проблеме Варинга, может быть поставлен в зависимость от точности оценки сумм (2).

В 1934 г. И. М. Виноградов дал новый метод в аналитической теории чисел, основанный на оценке сумм вида

$$(3) \quad \sum \sum \xi(x) \eta(y) e^{2\pi i f(x, y)},$$

где суммирование распространяется на все целые точки (x, y) некоторой области. Новый метод И. М. Виноградова обладает необычайной силой; его применение привело к ряду фундаментальных результатов (И. М. Виноградов, Ю. В. Линник, Н. Г. Чудаков). В частности, И. М. Виноградов показал, что для $G(n)$ в проблеме Варинга справедлива оценка

$$G(n) < n(3 \log n + 11).$$

Эта оценка является близкой к окончательной, так как существуют сколь угодно большие N непредставимые в виде (1) при $s \leq n$. Новый метод И. М. Виноградова дал ему возможность чрезвычайно уточнить оценку сумм (2).

*

В 1929 г. И. М. Виноградов установил асимптотическую формулу для числа $I(M, N; s)$ решений системы диофантовых уравнений

$$(4) \quad \begin{cases} x_1^n + x_2^n + \dots + x_s^n = N, \\ x_1^m + x_2^m + \dots + x_s^m = M, \end{cases}$$

где $n > m > 1$, при числе слагаемых порядка $n^2 \cdot 2^n$. Именно И. М. Виноградов показал, что если $M = hN^{\frac{m}{n}}$ и h удовлетворяет неравенствам

$$(5) \quad 1 < K_1 \leq h \leq K_2 < s^{1-\frac{m}{n}},$$

где K_1 и K_2 —постоянные, то

$$(6) \quad I(M, N; s) = B(h) N^{\frac{s}{n}-1-\frac{m}{n}} (S(M, N; s) + O(N^{-\frac{0.1}{n}})),$$

тельных чисел N_1, \dots, N_n в виде

[illegible]

где p_1, \dots, p_s — простые. Мною была найдена асимптотическая формула для числа представлений системы чисел N_1, \dots, N_n , удовлетворяющих определенным условиям порядка, в форме (16) при числе слагаемых s порядка $n^3 \log n$ и было проведено исследование особого ряда при достаточно большом числе слагаемых; аналогичная работа была выполнена Хуа Ло-Кеном.

В 1942 г. мною было показано, что система

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 + p_2 + \dots + p_s = N_1, \\ p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_s^2 = N_2 \end{array} \right.$$

разрешима при $s = 7, s = N_2 \pmod{24}, N_1 = N_2 \pmod{2}$ в случае, когда

$$1 + \varepsilon \leq \frac{N_1}{N_2} \leq \sqrt{s} - \varepsilon,$$

где ε — произвольно-малое положительное постоянное и $N_1 \in C(\varepsilon)$.

В 1947 г. мною было опубликовано доказательство того, что асимптотическая формула для числа решений (16) имеет место уже при числе слагаемых порядка $n^2 \log n$. Хуа Ло-Кен, также в 1947 г., опубликовал сообщение о том, что данная асимптотическая формула верна при числе слагаемых порядка $n^2 \log n$. Следует отметить, что этот порядок числа слагаемых, необходимых для вывода данной асимптотической формулы, является близким к предельному. Наконец, мною было доказано, что система

[illegible]

где $0 < l < m < \dots < n$ — заданные постоянные и N_l, \dots, N_m — целые, удовлетворяющие определенным условиям, разрешима при числе слагаемых порядка $ng \log n$, где g — число чисел l, m, \dots, n . Следует отметить, что исследование системы (16) дает возможность рассматривать и системы более общего вида

[illegible]

где $f_i(x)$ — целые рациональные функции степени i от x .

(Поступило 6. IX. 1951.)

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $\sum_{k=1}^n A_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kj}} = A_0$ EN NOMBRES RATIONNELS

Par
G. GEORGIEV (Sofia)
(Présenté par L. RÉDEI)

Considérons la transformation

$$(1) \quad x_i = \prod_{r=1}^n X_r^{\lambda_{ri}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

de l'espace euclidien n -dimensionnel R^n en lui-même suivant laquelle au point $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de R^n correspond le point $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ également de R^n , les nombres λ_{ri} étant supposés réels. Pour trouver une transformation inverse à (1) nous supposons que le déterminant

$$L = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro et nous nous proposons de vérifier les relations (1) identiquement par les fonctions X_r des variables x_i de la forme

$$(1') \quad X_r = \prod_{k=1}^n x_k^{\mu_{kr}}, \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

les nombres μ_{kr} étant convenablement choisis. En remplaçant dans (1) X_r par (1') et en identifiant les coefficients, on trouve

$$\sum_{r=1}^n \lambda_{ri} \mu_{kr} = 0 \quad \text{pour } i \neq k; \quad \sum_{r=1}^n \lambda_{ri} \mu_{ir} = 1, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

d'où on calcule

$$(2) \quad \mu_{kr} = -\frac{L_{rk}}{L}, \quad (L \neq 0; \quad k, r = 1, 2, \dots, n),$$

L_{rk} désignant le complément algébrique de λ_{rk} dans le déterminant L . Pour

les déterminants L et $M = |\mu_{rk}|$ on aura

$$(2') \quad L \cdot M = 1.$$

On appelle la transformation (1) *rationnelle*, lorsque les exposants λ_{ri} sont des nombres entiers et *birationnelle*, lorsque la transformation inverse (1') est aussi rationnelle. Il est évident que les transformations (1) et (1') sont simultanément birationnelles.

Des relations (2) et (2') on déduit la propriété suivante des transformations birationnelles:

Pour que la transformation rationnelle (1) soit birationnelle, il faut et il suffit que $L = \pm 1$. Dans ce cas $\mu_{kr} = L \cdot L_{rk}$, $M = L$.

Dans ce travail nous donnons des conditions suffisantes pour qu'on puisse résoudre complètement en nombres rationnels des équations indéterminées de la forme

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0.$$

Nous y arrivons¹ en appliquant des transformations birationnelles de la forme (1).

Nous supposons que les exposants a_{ki} de l'équation (3) sont entiers et que le déterminant

$$A = |a_{ki}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. En appliquant la transformation (1), l'équation (3) devient

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n A_k \prod_{r=1}^n X_r^{b_{kr}} = A_0,$$

où

$$(5) \quad b_{kr} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_{ri}, \quad (k, r = 1, 2, \dots, n).$$

Pour le déterminant $|b_{kr}|$ on trouve

$$(6) \quad |b_{kr}| = |\lambda_{ri}| \cdot |a_{ki}|,$$

et par conséquent

$$(7) \quad |b_{kr}| = \pm |a_{ki}| \quad \text{pour} \quad |\lambda_{ri}| = \pm 1,$$

c'est-à-dire:

¹ V. la note des M. M. L. TCHAKALOFF et CHR. KARANIKOLOFF, Résolution de l'équation $Ax''' + By'' = z''$ en nombres rationnels, *Comptes Rendus*, Paris, **210** (1940), p. 281—283.

V. aussi la thèse de M. CHR. KARANIKOLOFF, *Contribution à la théorie des équations indéterminées* (Sofia, 1942).

La valeur absolue du déterminant $A = |a_{ki}|$ est invariante lorsqu'on transforme l'équation (3) au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1).

En résolvant les relations (5) une fois par rapport à λ_{r1} , autre fois par rapport à a_{ki} , on obtient

$$(8) \quad \lambda_{rp} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^n b_{kr} A_{kp}, \quad (r, p = 1, 2, \dots, n),$$

$$(9) \quad a_{kp} = \frac{1}{L} \sum_{r=1}^n b_{kr} L_{rp}, \quad (k, p = 1, 2, \dots, n),$$

A_{kp} et L_{rp} étant les compléments algébriques respectivement de a_{kp} et λ_{rp} dans les déterminants A et L .

Désignons par a_k et b_k les plus grands diviseurs communs des éléments de k -ième ligne, respectivement des déterminants $|a_{ki}|$ et $|b_{kr}|$. La relation (5) montre que a_k est un diviseur des nombres $b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn}$, c'est-à-dire que a_k est un facteur de b_k . La relation (9) montre que b_k est un diviseur des nombres $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ à condition que $L = +1$, c'est-à-dire que b_k est un facteur de a_k . Or, $a_k = b_k$,

$$(10) \quad a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) = (b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn}) = b_k.$$

Ainsi nous avons démontré la propriété suivante:

Le plus grand diviseur commun des exposants a_k du k -ième terme de l'équation (3) est invariant lorsqu'on transforme cette équation au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1).

Considérons les exposants b_{kr} de l'inconnue X_r dans l'équation transformée (4) et soit β le plus grand diviseur commun de ces nombres, $\beta_k =$ le quotient de b_{kr} et β :

$$(11) \quad b_{kr} = \beta \cdot \beta_k; \quad \beta = (b_{1r}, b_{2r}, \dots, b_{nr}); \quad (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 1.$$

Ainsi les nombres (8) deviendront

$$(12) \quad \lambda_{rp} = \frac{\beta}{A} \sum_{k=1}^n \beta_k A_{kp}, \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Si l'on pose

$$(13) \quad \mathcal{A} = \left(\sum_{k=1}^n \beta_k A_{k1}, \sum_{k=1}^n \beta_k A_{k2}, \dots, \sum_{k=1}^n \beta_k A_{kn} \right),$$

on trouvera

$$\frac{\beta \cdot \mathcal{A}}{|A|} = \left(\frac{\beta}{A} \sum \beta_k A_{k1}, \frac{\beta}{A} \sum \beta_k A_{k2}, \dots, \frac{\beta}{A} \sum \beta_k A_{kn} \right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\beta \cdot \mathcal{A}}{|A|} = (\lambda_{r1}, \lambda_{r2}, \dots, \lambda_{rn}).$$

Mais λ_{rp} , ($p = 1, 2, \dots, n$), sont des nombres premiers entre eux parce que

ces nombres sont les éléments de la r -ième ligne du déterminant $|\lambda_{r,i}| = \pm 1$ et par conséquent $\frac{\beta \cdot J}{|A|} = 1$, c'est-à-dire

$$(14) \quad \beta = -\frac{|A|}{J}.$$

En remplaçant dans (12) β par (14), on obtient

$$(15) \quad \lambda_{rk} = \pm \frac{1}{J} \sum_{i=1}^n \beta_i A_{ki}, \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

où l'on prend le signe $+$ lorsque $A > 0$ et le signe $-$ lorsque $A < 0$.

Réciproquement, soit $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ un système arbitraire de n nombres entiers et premiers entre eux. Suivant la définition (13) de J , les n nombres (15) seront aussi entiers et premiers entre eux. Mais dans ce cas, d'après un théorème² d'HERMITE, il existe encore $n(n-1)$ nombres entiers λ_{ur} , ($u = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n$; $r = 1, 2, \dots, n$), tels que $|\lambda_{re}| = \pm 1$. Ces n^2 nombres λ_{ki} déterminent donc une transformation birationnelle de la forme (1). Considérons les exposants b_{kr} de l'inconnue X_r de l'équation (4), obtenue de l'équation (3) au moyen de cette transformation. Ainsi on aura

$$b_{kr} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_{ri} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \left(\frac{1}{J} \sum_{s=1}^n \beta_s A_{si} \right) = \frac{1}{J} \sum_{s=1}^n \beta_s \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} A_{si} \right),$$

c'est-à-dire

$$(16) \quad b_{kr} = -\frac{A}{J} \beta_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Nous démontrerons que le nombre $\frac{A}{J}$ est toujours entier quel que soit le système $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ des nombres entiers et premiers entre eux. En effet, si l'on pose

$$\beta = \left(-\frac{A\beta_1}{J}, -\frac{A\beta_2}{J}, \dots, -\frac{A\beta_n}{J} \right),$$

on aura $\beta \cdot J = A \cdot (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, c'est-à-dire $\beta \cdot J = |A|$. Cette relation montre que J est un diviseur de A . En vertu de (7) et de (16), on trouve

$$(17) \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1, r-1} & \beta_1 & b_{1, r+1} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2, r-1} & \beta_2 & b_{2, r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n, r-1} & \beta_n & b_{n, r+1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = J.$$

Ainsi nous avons établi le théorème suivant:

THÉOREME 1. Dans l'équation (4), obtenue de l'équation (3) par une transformation birationnelle de la forme (1), les exposants b_{ks} de quelconque

² Journal de Mathém. pures et appl., 14 (1), (1849), p. 21.

des inconnues X_r sont toujours de la forme

$$(f) \quad b_{ks} = \frac{|A|}{J} \cdot \beta_k, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

où les nombres β_k sont entiers et premiers entre eux, J est le plus grand diviseur commun des nombres $\sum_{k=1}^n \beta_k A_{k,p}$, ($p=1, 2, \dots, n$), $A_{k,p}$ est le complément algébrique de $a_{k,p}$ dans le déterminant $A = |a_{k,i}|$:

$$J = \left(\sum_{k=1}^n \beta_k A_{k,1}, \sum_{k=1}^n \beta_k A_{k,2}, \dots, \sum_{k=1}^n \beta_k A_{k,n} \right), \quad (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 1.$$

Réciproquement, lorsque les n nombres b_{ks} sont de la forme (f), alors il existe une transformation birationnelle de la forme (1) telle, que les exposants d'une des inconnues X_r dans l'équation transformée (4) coïncident avec ces nombres. Tous les exposants $b_{k,i}$ de l'équation transformée (4) vérifient la relation (17).

Suivant les conditions de ce théorème, si l'on pose $\beta_k = 1$, on trouvera le corollaire suivant:

COROLLAIRE. Pour chaque équation de la forme (3) il existe une transformation birationnelle qui ramène cette équation à une équation de la même forme et telle que les exposants d'une des inconnues sont égaux tous au nombre

$$b = \frac{|A|}{J'} \quad \text{où} \quad J' = \left(\sum_{k=1}^n A_{k,1}, \sum_{k=1}^n A_{k,2}, \dots, \sum_{k=1}^n A_{k,n} \right).$$

Tous les exposants $b_{k,i}$ de l'équation transformée vérifient la relation (17) dans laquelle on a $\beta_k = 1$, $J = J'$.

Envisageons les nombres $b_{ks} = \frac{|A|}{J} \beta_k$ du théorème 1. Il est évident que pour qu'on ait $b_{ks} = 0$ il faut et il suffit que $\beta_k = 0$. Il est aussi évident que pour qu'on ait $b_{ks} = 1$ il faut et il suffit que $\frac{|A|}{J} \beta_k = 1$, $\beta_k = 1$. Mais pour qu'on ait $J = |A|$ il suffit que les nombres

$$\delta_p = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^n \beta_k A_{k,p}, \quad (p=1, 2, \dots, n),$$

soient entiers. En effet, on aura

$$\sum_{k=1}^n a_{s,p} \delta_p = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^n \beta_k \left(\sum_{p=1}^n a_{s,p} A_{k,p} \right),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{p=1}^n a_{s,p} \delta_p = \beta_s, \quad (s=1, 2, \dots, n).$$

Ces relations montrent que le plus grand diviseur commun δ des nombres δ_p est un diviseur de tous les nombres β_s , c'est-à-dire que δ est un facteur du

plus grand diviseur commun d des nombres β_s . Mais d étant égal à 1, on aura $\delta = 1$.

Ainsi nous sommes arrivés au théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Pour que l'équation (3) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à une équation de la même forme, mais linéaire par rapport à une des inconnues, il faut et il suffit qu'il existe un système de n nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ qui sont des zéros et des unités, sans que tous les ε_k soient égaux à zéro et tels, que les nombres $\frac{1}{A} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k A_{k,p}$, ($p = 1, 2, \dots, n$), soient entiers. Les exposants $b_{k,p}$ de l'équation transformée vérifient la relation (17), dans laquelle on aura $\beta_k = \varepsilon_k$, $J = A$.*

Suivant les conditions du théorème 1, si l'on pose $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{n-1} = 0$, $\beta_n = 1$, on obtiendra le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Pour chaque équation de la forme (3) il existe une transformation birationnelle de la forme (1) telle que les $n-1$ premiers termes de l'équation transformée (4) ne dépendront que des $n-1$ inconnues nouvelles X_1, X_2, \dots, X_{n-1} . La valeur absolue du déterminant $b_{k,p}$, composé des exposants $b_{k,p}$ des $n-1$ premiers termes de l'équation transformée, est égale au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre $n-1$ de la matrice*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Soit (1) la transformation birationnelle transformant les $n-1$ premiers termes y_k

$$(18) \quad y_k = \prod_{i=1}^n x_i^{t_{ki}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

de l'équation (3) en fonctions

$$(19) \quad y_k = \prod_{s=1}^{n-1} X_s^{b_{ks}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

où

$$(20) \quad b_{ks} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_{si}, \quad (k, s = 1, 2, \dots, n-1); \quad |\lambda_{si}| = \pm 1.$$

En vertu du théorème 3, il existe une autre transformation birationnelle de la forme

$$(21) \quad X_r = \prod_{s=1}^{n-1} Z_s^{u_{rs}}, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1), \quad |u_{rs}| = \pm 1,$$

qui ramène les $n-2$ premières fonctions (19) aux fonctions

$$(22) \quad y_k = \prod_{r=1}^{n-2} Z_r^{c_{kr}}; \quad c_{kr} = \sum_{s=1}^{n-1} b_{ks} u_{rs}, \quad (k, r = 1, 2, \dots, n-2).$$

Posons

$$(23) \quad \lambda'_{rs} = \mu_{rs}, \quad \lambda'_{rs} = \lambda'_{ns} = 0, \quad \lambda'_{nn} = 1 \quad \text{pour } r, s = 1, 2, \dots, n-1.$$

On a évidemment

$$|\lambda'_{ri}| = |\mu_{rs}| = \pm 1.$$

Posons encore

$$(24) \quad \mathfrak{P}_{ri} = \sum_{s=1}^n \lambda'_{rs} \lambda_{si}, \quad (r, i = 1, 2, \dots, n).$$

De la définition (24) des nombres \mathfrak{P}_{ri} il s'ensuit que tous ces nombres sont entiers et que $|\mathfrak{P}_{ri}| = |\lambda'_{rs}| \cdot |\lambda_{si}|$, c'est-à-dire que

$$|\mathfrak{P}_{ri}| = +1.$$

En d'autres termes, la transformation

$$X_i \rightarrow \prod_{r=1}^n Z_r^{\mathfrak{P}_{ri}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

est une transformation birationnelle. Nous démontrerons que cette transformation ramène les premiers $n-2$ termes (18) de l'équation (3) au $n-2$ termes (22) de l'équation transformée (4). En effet, en vertu de (24) on aura

$$c'_{ki} = \sum_{r=1}^n a_{ki} \mathfrak{P}_{ri} = \sum_{r=1}^n a_{ki} \left(\sum_{s=1}^n \lambda'_{rs} \lambda_{si} \right) = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n a_{ki} \lambda_{si} \right) \lambda'_{rs},$$

et selon (20) on obtient

$$c'_{kr} = \sum_{s=1}^n b_{ks} \lambda'_{rs} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

De ces relations et de (23) on déduit $c'_{kr} = \sum_{s=1}^{n-1} b_{ks} \mu_{rs}$, $(k, r = 1, 2, \dots, n-1)$, c'est-à-dire $c'_{kr} = c_{kr}$, $(k, r = 1, 2, \dots, n-2)$.

Ainsi il est évident que par induction complète on est ramené au théorème suivant:

THÉOREME 4. *Pour chaque équation de la forme (3) il existe une transformation birationnelle de la forme (1) telle, que les m , ($m < n$), premiers termes de l'équation transformée (4) ne dépendront que des m inconnues nouvelles X_1, X_2, \dots, X_m .*

Admettons que l'équation transformée (4) est de la forme

$$(25) \quad \sum_{k=1}^n A_k X_k^{m_k} = A_0.$$

Dans ce cas on aura

$$(26) \quad b_{kr} = 0 \quad \text{pour } k \neq r, \quad b_{kk} = m_k \neq 0, \quad (k, r = 1, 2, \dots, n),$$

$$b_k = (b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn}) = |b_{kf}| = |m_k|,$$

et par conséquent, en vertu de (10), on obtient

$$(27) \quad |m_k| = a_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ainsi, en tenant compte de (7), (26) et (27), on aura $+|a_{ki}| = |b_{kr}| = \prod_{k=1}^n b_{kr} =$

$$\prod_{k=1}^n m_k = \pm \prod_{k=1}^n a_k, \text{ c'est-à-dire}$$

$$(28) \quad |a_{ki}| = \pm \prod_{k=1}^n a_k.$$

Réciproquement, supposons que la condition (28) est remplie et posons

$$\lambda_{rp} = \frac{a_r A_{rp}}{A}, \quad (r, p = 1, 2, \dots, n),$$

A_{rp} étant le complément algébrique de a_{rp} dans le déterminant A , a_r étant le plus grand diviseur commun des exposants $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$. Suivant la condition (28) on trouve

$$\lambda_{rp} = \pm \frac{A_{rp}}{a_r}, \quad \alpha_r = a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_{r+1} \dots a_n.$$

On voit facilement que les nombres λ_{rp} sont entiers. En effet, chaque ligne du déterminant A_{rp} est composée des éléments appartenants tous à une ligne du déterminant A , c'est-à-dire les éléments des lignes différentes de A_{rp} se divisent respectivement par $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_n$.

Si l'on calcule le déterminant $|\lambda_{rp}|$, on trouvera

$$|\lambda_{rp}| = \left| \frac{a_r A_{rp}}{A} \right| = \frac{||a_r||}{A^n} \cdot |A_{rp}| = \frac{||a_r||}{A^n} \cdot A^{n-1} = \frac{||a_r||}{A},$$

et par conséquent, selon (28), on obtiendra $|\lambda_{rp}| = 1$. Ainsi nous avons prouvé que les nombres $\lambda_{rp} = \frac{a_r A_{rp}}{A}$ déterminent une transformation birationnelle de la forme (1). On démontre facilement que cette transformation ramène l'équation (3) à l'équation (25), dans laquelle on a $m_k = a_k$. En effet,

$$b_{kr} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_{ri} = \frac{a_k}{A} \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ri},$$

c'est-à-dire $b_{kr} = 0$ pour $k \neq r$, $b_{kk} = a_k$.

Ainsi nous avons établi le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Pour que l'équation (3) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à l'équation (25), il faut et il suffit que l'exposant m_k soit égal au plus grand diviseur commun a_k des exposants a_{ki} , ($i = 1, 2, \dots, n$), et que la condition $\alpha_k = \pm \prod_{k=1}^n a_k$ soit remplie.*

COROLLAIRE. *Pour que l'équation (3) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à l'équation $\sum_{k=1}^n A_k X_k^m = A_0$, il faut et il suffit que l'exposant m soit le plus grand diviseur commun des éléments de chaque ligne du déterminant $A = ||a_{ki}||$ et qu'on ait $A = \pm m^n$.*

THÉOREME 6. *Pour que l'équation (3) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à l'équation linéaire $\sum_{k=1}^n A_k X_k = A_0$, il faut et il suffit qu'on ait $|a_{ki}| = \pm 1$.*

Envisageons l'équation

$$(29) \quad \sum_{k=1}^{n-1} A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0,$$

à n inconnues x_i , dont le premier membre contient $n-1$ termes. En vertu du théorème 3, on aura le théorème suivant:

THÉOREME 7. *Pour chaque équation de la forme (29) il existe une transformation birationnelle de la forme (1) qui la ramène à l'équation*

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \prod_{r=1}^{n-1} X_r^{b_{kr}} = A_0,$$

qui est de la forme (3). La valeur absolue du déterminant $|b_{kr}|$ est égale au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre $n-1$ de la matrice

$$M \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

A l'aide de ce théorème et du théorème 6 on trouve le théorème suivant:

THÉOREME 8. *Pour que l'équation (29) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à l'équation linéaire $\sum_{k=1}^{n-1} A_k X_k = A_0$, il faut et il suffit que tous les déterminants d'ordre $n-1$ de la matrice M soient des nombres premiers entre eux.*

Envisageons l'équation

$$(30) \quad \sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ik}} = 0,$$

et appliquons pour cette équation le corollaire du théorème 1. Ainsi on démontre le théorème suivant:

THÉOREME 9. *Pour chaque équation de la forme (30) il existe une transformation birationnelle de la forme (1) qui la ramène à l'équation*

$$(31) \quad \sum_{k=1}^n A_k \prod_{r=1}^{n-1} X_r^{b_{kr}} = 0$$

où les exposants b_{kr} vérifient la relation

$$(32) \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1, n-1} & 1 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2, n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n, n-1} & 1 \end{vmatrix} = \pm \mathcal{A}', \quad \mathcal{A}' = \left(\sum_{k=1}^n A_{k1}, \sum_{k=1}^n A_{k2}, \dots, \sum_{k=1}^n A_{kn} \right).$$

En divisant l'équation (31) par $\prod_{r=1}^{n-1} X_r^{b_{nr}}$, on obtiendra l'équation

$$(33) \quad \sum_{k=1}^{n-1} A_k \prod_{r=1}^{n-1} X_r^{c_{kr}} + A_n = 0, \quad c_{kr} = b_{kr} - b_{nr},$$

qui est de la forme (3). On voit facilement que $|c_{kr}| \leq \pm J'$, où J' est défini par (32). En vertu du théorème 6 il existe une transformation birationnelle qui

ramène l'équation (33) à l'équation $\sum_{k=1}^{n-1} A_k Y_k + A_n = 0$, si $J' = 1$. Lorsqu'on

pose $Y_k = \frac{X_k}{X_n}$, ($k = 1, 2, \dots, n$), cette équation deviendra $\sum_{k=1}^n A_k X_k = 0$.

Ainsi on a démontré le théorème suivant:

THÉOREME 10. *Pour que l'équation (30) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à l'équation linéaire $\sum_{k=1}^n A_k X_k = 0$, il faut et il suffit que les sommes $\sum_{k=1}^n A_k p$, ($p = 1, 2, \dots, n$), soient des nombres premiers entre eux.*

Envisageons l'équation

$$(34) \quad \sum_{k=1}^n A_k x_k^{m_k} = 0, \quad (m_k \neq 0 - \text{ nombres entiers}),$$

qui est un cas particulier de l'équation (30). En effet, si l'on pose dans l'équation (30)

$$a_{ki} = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq i, \quad a_{kk} = m_k \neq 0,$$

on obtiendra l'équation (34). Dans ce cas, on aura

$$A_{ki} = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq i, \quad A_{kk} = \frac{m}{m_k}, \quad m = m_1 m_2 \dots m_n,$$

ce qui donne $\sum_{k=1}^n A_{kp} = A_{pp} = \frac{m}{m_p}$. De cette manière, la condition suivante:

$$\left(\sum_{k=1}^n A_{k1}, \sum_{k=1}^n A_{k2}, \dots, \sum_{k=1}^n A_{kn} \right) = 1 \quad \text{se réduit à la condition}$$

$$\left(\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}, \dots, \frac{m}{m_n} \right) = 1.$$

Mais cette condition est équivalente à la condition que les nombres m_k soient deux à deux premiers entre eux.

Ainsi on a établi le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Pour que l'équation (34) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à l'équation linéaire $\sum_{k=1}^n A_k X_k = 0$, il faut et il suffit que les exposants m_k soient deux à deux premiers entre eux.*

En transformant l'équation (34) au moyen de (1) on obtient l'équation

$$(35) \quad \sum_{k=1}^n A_k \prod_{r=1}^n X_r^{b_{kr}} = 0; \quad b_{kr} = m_k \lambda_{rk}, \quad (k, r = 1, 2, \dots, n).$$

Les exposants de l'inconnue X_r sont évidemment les nombres $b_{1r}, b_{2r}, \dots, b_{nr}$. Nous nous proposons de chercher les conditions pour que b_{kr} soient de la forme

$$(36) \quad b_{kr} = \lambda + \varepsilon_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

λ étant un nombre entier et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ étant égaux ou bien à 0, ou bien à 1, sans que tous les ε_k soient égaux entre eux. Dans ce cas, l'équation (35) ne contiendra que les puissances X_n^λ et $X_n^{\lambda+1}$ et sera de la forme

$$X_n^\lambda \cdot \sum_{k=1}^n A_k X_n^{\varepsilon_k} \prod_{r=1}^{n-1} X_r^{b_{kr}} = 0.$$

On déduit de (35) pour $r = n$ et de (36)

$$m_k \lambda_{nk} = \lambda + \varepsilon_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

d'où l'on tire pour $\varepsilon_p = 1, \varepsilon_q = 0$, $m_p \lambda_{np} = \lambda + 1$, $m_q \lambda_{nq} = \lambda$. En éliminant λ , on obtient

$$(37) \quad m_p \lambda_{np} - m_q \lambda_{nq} = 1.$$

Pour que cette équation en λ_{np} et λ_{nq} admette des solutions en nombres entiers, il faut et il suffit que m_p et m_q soient premiers entre eux,

$$(38) \quad (m_p, m_q) = 1.$$

Remarquons, que le système ε_k permet de répartir les nombres m_k en deux groupes: dans le premier nous mettons tous les m_p pour lesquels $\varepsilon_p = 1$ et dans le deuxième — tous les autres. On conclut de (38) que chaque nombre du premier groupe est premier avec chaque nombre du second.

Ainsi nous avons trouvé une condition nécessaire pour que notre problème ait une solution. Nous montrerons qu'elle est suffisante. Pour cela nous supposerons que les exposants m_k vérifient cette condition. En changeant l'ordre des termes dans l'équation (34), on peut admettre que le premier groupe contient les s premiers nombres m_p , et le second — tous les autres nombres m_q . On en conclut que les produits

$$m = m_1 m_2 \dots m_s, \quad m' = m_{s+1} m_{s+2} \dots m_n,$$

sont aussi des nombres premiers entre eux,

$$(m, m') = 1.$$

Considérons maintenant l'équation

$$(39) \quad m\mu - m'\mu' = 1,$$

aux inconnues μ, μ' . Comme $(m, m') = 1$, cette équation admet des solutions entières et soit μ, μ' une telle solution. Posons

$$(40) \quad \lambda_{np} = \frac{m}{m_p} \mu, \quad (p = 1, 2, \dots, s); \quad \lambda_{nq} = \frac{m'}{m_q} \mu', \quad (q = s+1, s+2, \dots, n).$$

On voit facilement que les nombres entiers λ_{nk} , ($k = 1, 2, \dots, n$), sont premiers entre eux. En effet, chaque nombre λ_{np} , ($p \leq s$), est premier avec chaque nombre λ_{nq} , ($q > s$), car on déduit de (40) et de (39) que $m_p \lambda_{np} - m_q \lambda_{nq} = m'p - m'q = 1$, c'est-à-dire la condition (38) est satisfaite pour $p \leq s$, $q > s$. Mais d'après le théorème d'HERMITE déjà cité, il existe encore $n(n-1)$ nombres entiers λ_{uv} , ($u = 1, 2, \dots, n-1$; $v = 1, 2, \dots, n$), tels que $|\lambda_{ki}| = \pm 1$. Il est évident que la transformation birationnelle déterminée par tous les nombres λ_{ki} ramènera l'équation (34) à l'équation (35), dans laquelle les exposants b_{kn} de l'inconnue X_n seront

$$b_{pn} = m_p \lambda_{np} = m'p, (p = 1, 2, \dots, s); b_{qn} = m_q \lambda_{nq} = m'q, (q = s+1, s+2, \dots, n).$$

Par conséquent, les s premiers termes de l'équation (35) contiennent $X_n^{m'p}$ et les autres $X_n^{m'q}$ et comme $m'p - m'q = 1$, après avoir divisé par $X_n^{m'p}$, on obtient une nouvelle équation linéaire en X_n .

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 11. *Pour que l'équation (34) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à l'équation (35), qui est linéaire par rapport à une des inconnues, il faut et il suffit que les exposants m_k se répartissent en deux groupes non vides, de façon que chaque nombre du premier groupe est premier avec chaque nombre du second.*

Envisageons l'équation

$$(41) \quad \sum_{k=1}^m A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0, \quad (m < n).$$

Suivant le théorème 4 on aura le théorème suivant:

THÉORÈME 12. *Chaque équation de la forme (41) peut être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à l'équation $\sum_{k=1}^m A_k \prod_{r=1}^m X_r^{b_{kr}} = A_0$, dont le premier membre contient aussi m termes, mais avec le même nombre des inconnues X_r .*

En transformant l'équation (41) au moyen de (1) on obtient l'équation

$$(42) \quad \sum_{k=1}^m A_k \prod_{r=1}^m X_r^{b_{kr}} = A_0; \quad b_{kr} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_{ri}, \quad (k = 1, 2, \dots, m; r = 1, \dots, n).$$

Nous nous proposons de chercher les conditions pour que les exposants b_{kn} de l'inconnue X_n soient de la forme

$$(43) \quad b_{kn} = \varepsilon_k, \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

les nombres ε_k étant des zéros et des unités, sans que tous les ε_k soient égaux à zéro. Dans ce cas on obtient de (42) pour $r = n$ et de (43)

$$(44) \quad \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_{ni} = \varepsilon_k, \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

De cette manière on est amené à résoudre en nombres entiers le système (44)

de m équations à n inconnues λ_{ni} . D'autre part, on peut montrer qu'une solution arbitraire λ_{ni} du système (44) et composée des nombres premiers entre eux. En effet, pour $\varepsilon_p = 1$ on obtient de (44) la relation $\sum_{i=1}^n a_{pi} \lambda_{ni} = 1$, qui montre que les nombres λ_{ni} sont premiers entre eux. Mais d'après le théorème d'HERMITE déjà cité, il existe encore $n(n-1)$ nombres entiers $\lambda_{ni,r}$, ($u = 1, 2, \dots, n-1$; $r = 1, 2, \dots, n$) tels que $|\lambda_{ki}| = \pm 1$. Ainsi il est évident, que la transformation birationnelle (1), déterminée par tous les nombres λ_{ki} ramènera l'équation (41) à une équation de la même forme, mais linéaire par rapport à l'inconnue X_n . D'autre part, d'après un théorème³ de I. HEGER, pour que le système (44) ait des solutions en nombres entiers, il faut et il suffit que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice composée des coefficients des inconnues λ_{ni} soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice composée de tous les coefficients du système (44).

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

THÉOREME 13. *Pour que l'équation (41) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à une équation de la même forme, mais linéaire par rapport à une des inconnues, il faut et il suffit qu'il existe un système de m nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, qui sont de zéros et des unités, sans que tous les ε_k soient égaux à zéro, de façon que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice*

$$M \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice

$$M' \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \varepsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \varepsilon_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \varepsilon_m \end{vmatrix}.$$

Considérons enfin l'équation

$$(45) \quad \sum_{k=1}^m A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = 0, \quad (m < n).$$

En transformant cette équation au moyen de (1), on obtient l'équation

$$(46) \quad \sum_{k=1}^m A_k \prod_{r=1}^n X_r^{b_{kr}} = 0; \quad b_{kr} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_{ri}, \quad (k = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, n).$$

³ *Denkschriften d. Kais. Akademie der Wissenschaften, Mathem. Naturwissensch. Klasse, Wien, 14 (1858), II, p. 1. V. aussi; E. CAHEN, Théorie des nombres, t. I. (1914), I, p. 170.*

Nous nous proposons de chercher les conditions pour que les exposants b_{kn} de l'inconnue X_n soient de la forme

$$(47) \quad b_{kn} = \lambda + \varepsilon_k, \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

λ étant un nombre entier et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ étant égaux ou bien à 0, ou bien à 1, sans que tous les ε_k soient égaux entre eux. Dans ce cas on obtient de (46) pour $r = n$ et de (47)

$$(48) \quad \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_{ni} = \lambda + \varepsilon_k, \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

De cette manière on est amené à résoudre en nombres entiers le système (48) de m équations à $n+1$ inconnues λ, λ_{ni} . D'autre part, on peut montrer que les n nombres λ_{ni} d'une solution arbitraire λ, λ_{ni} du système (48) sont toujours premiers entre eux. En effet, pour $\varepsilon_p = 1, \varepsilon_q = 0, (p, q \leq n)$, on déduit de (48) les relations $\sum_{i=1}^n a_{pi} \lambda_{ni} = \lambda + 1, \sum_{i=1}^n a_{qi} \lambda_{ni} = \lambda$. L'élimination de λ conduit enfin à la relation $\sum_{i=1}^n (a_{pi} - a_{qi}) \lambda_{ni} = 1$, qui montre que les nombres λ_{ni} sont premiers entre eux.

En appliquant les théorèmes d'HERMITE et de HEGER, comme dans le théorème précédent, on trouve le théorème suivant:

THÉORÈME 14. *Pour que l'équation (45) puisse être ramenée au moyen d'une transformation birationnelle de la forme (1) à une équation de la même forme, mais linéaire par rapport à une des inconnues, il faut et il suffit qu'il existe un système de m nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, qui sont des zéros et des unités, sans que tous les ε_k soient égaux entre eux, de façon que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice*

$$N \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 \end{vmatrix}$$

soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice

$$N' \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & \varepsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 & \varepsilon_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 & \varepsilon_m \end{vmatrix}.$$

Les résultats que nous avons obtenus relativement aux transformations birationnelles des équations servent à résoudre les équations en nombres rationnels. Nous y arriverons en appliquant les deux propriétés suivantes:

(α) Lorsque l'équation $\sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0$ est linéaire par rapport à une des inconnues x_i et ses coefficients A_k et ses exposants $a_{k,i}$ sont des nombres entiers, il est alors possible de la résoudre complètement en nombres rationnels.

(β) Lorsqu'on peut résoudre complètement l'équation $\sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0$, dont les coefficients A_k et les exposants $a_{k,i}$ sont des entiers, en nombres rationnels, il est alors possible de résoudre complètement en nombres rationnels chaque équation obtenue de l'équation donnée par une transformation birationnelle de la forme (1) et inversement.

En se servant des propriétés (α), (β) et des théorèmes précédents, on obtient les théorèmes suivants:

THÉORÈME 15. On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$(41) \quad \sum_{k=1}^m A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0, \quad (A_k, a_{k,i} \text{ nombres entiers; } m \leq n),$$

à condition qu'il existe un système de m nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, qui sont des zéros et des unités, sans que tous les ε_k soient égaux à zéro, de façon que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice

$$M \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice

$$M' \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \varepsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \varepsilon_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \varepsilon_m \end{vmatrix}.$$

THÉORÈME 16. On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0, \quad (A_k, a_{k,i} \text{ nombres entiers}),$$

à condition qu'il existe un système de n nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, égaux à 0, ou bien à 1, sans que tous les ε_k soient égaux à 0 et tels, que les nombres $\frac{1}{A} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k A_{k,p}$, ($p = 1, 2, \dots, n$), $A_{k,p}$ désignant le complément algébrique de $a_{k,p}$, dans le déterminant $A = |a_{k,i}| \neq 0$, soient entiers.

COROLLAIRE. On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation (3) à condition que $|a_{k,i}| = \pm 1$.

THÉORÈME 17. On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation (3) à condition que $|a_{k,i}| = \prod_{k=1}^n a_k$, a_k désignant le plus grand diviseur commun des éléments $a_{k,i}$ de k -ième ligne du déterminant $|a_{k,i}|$ et qu'au moins un de ces diviseurs soit égal à 1.

THÉORÈME 18. On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$(29) \quad \sum_{k=1}^{n-1} A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0, \quad (A_k, a_{k,i} \text{ nombres entiers}),$$

à condition que tous les déterminants d'ordre $n-1$ de la matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

soient des nombres premiers entre eux.

THÉORÈME 19. On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$(45) \quad \sum_{k=1}^m A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = 0, \quad (A_k, a_{k,i} \text{ nombres entiers; } m \leq n),$$

à condition qu'il existe un système de m nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, qui sont des zéros et des unités, sans que tous les ε_k soient égaux entre eux, de façon que le plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice

$$N \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 \end{vmatrix},$$

soit égal au plus grand diviseur commun de tous les déterminants d'ordre m de la matrice

$$N' \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & \varepsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 & \varepsilon_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 & \varepsilon_m \end{vmatrix}.$$

THÉORÈME 20. On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$(30) \quad \sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = 0, \quad (A_k, a_{k,i} \text{ nombres entiers}),$$

à condition que les sommes $\sum_{k=1}^n A_k p$, ($p = 1, 2, \dots, n$), soient des nombres premiers entre eux.

THÉORÈME 21. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation*

$$(34) \quad \sum_{k=1}^n A_k x_k^{m_k} = 0, \quad (A_k, m_k \neq 0 \text{ nombres entiers}),$$

à condition que les exposants m_k se répartissent en deux groupes non vides, de façon que chaque nombre du premier groupe est premier avec chaque nombre du second.

COROLLAIRE. *On peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation (34) à condition que les exposants m_k soient deux à deux premiers entre eux.*

(Reçu le 12 Septembre 1951.)

О РЕШЕНИИ В РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО

$$\text{УРАВНЕНИЯ } \sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0$$

Г. ГЕОРГИЕВ (София)

(Резюме)

В настоящей работе устанавливаются теоремы относительно полного решения в рациональных числах неопределенного уравнения

$$(u) \quad \sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0,$$

где некоторые из целых чисел A_k , a_{ki} могут быть нулями. Рассмотрены прежде всего случаи $A_0 \neq 0$ и $A_0 = 0$. Решение задачи осуществляется посредством трансформации вида

$$(1) \quad x_i = \prod_{r=1}^n X_r^{\lambda_{ri}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

которая называется рациональной, если показатели λ_{ri} целые числа и бирациональной, если и обратная ей трансформация

$$(1') \quad X_r = \prod_{k=1}^n x_k^{u_{kr}}, \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

является также рациональной. Легко устанавливается, что для того, чтобы рациональная трансформация (1) была бирациональной необходимо и достаточно, чтобы определитель $|\lambda_{ri}|$ имел значение ± 1 .

Трансформируя уравнение (u) с помощью бирациональной трансформации (1) в уравнение линейное относительно одной из неизвестных, мы находим все рациональные решения этого последнего уравнения, тем самым находим все рациональные решения данного уравнения (u).

PROBLEME DER HILBERTSCHEN THEORIE DER HÖHEREN STUFEN VON REKURSIVEN FUNKTIONEN

Von
RÓZSA PÉTER (Budapest)
(Vorgelegt von L. KALMÁR)

Einleitung

I.

1. Unter *rekursiven Funktionen* werden diejenige zahlentheoretische Funktionen verstanden, welche von gewissen Ausgangsfunktionen ausgehend durch endlich viele Substitutionen und Rekursionen definiert werden können. Dabei kann der Begriff der Rekursion auf verschiedene Weisen abgegrenzt werden; so gelangt man zu verschiedenen Funktionenklassen, die in der mathematischen Grundlagenforschung bereits vielfach angewandt wurden. Die Untersuchung des Zusammenhanges der verschiedenen rekursiven Funktionenklassen wurde zuerst durch die Art angeregt, wie HILBERT¹ das Kontinuumproblem in Angriff genommen hat. Hier handelt es sich bekanntlich um die Vermutung, daß es zwischen dem Abzählbaren und dem Kontinuum keine Mächtigkeit gibt; und da die Menge der zahlentheoretischen Funktionen von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, wollte HILBERT jene Vermutung dadurch beweisen, daß er den immer größeren transfiniten Zahlen der zweiten Zahlklasse Rekursionen immer „höherer Art“ zuordnet, und dann zeigt: die Annahme, daß die durch immer höhere Rekursionen definierten zahlentheoretischen Funktionen die Menge sämtlicher zahlentheoretischen Funktionen erschöpfen, kann zu keinem Widerspruch führen. In diesen Untersuchungen wurde der Begriff der rekursiven Funktion von höherer Stufe eingeführt: man unterscheidet zwischen Funktionen der I-ten, II-ten, III-ten Stufe, usw., je nachdem zu ihrem Aufbau bloß Funktionen von Zahlenvariablen, oder auch Funktionen von Funktionsvariablen, von Funktionsfunktionsvariablen, usw. zugelassen werden (die Werte jeder dieser Hilfsfunktionen sind dabei jedoch Zahlen).

2. Zur Ausführung des Hilbertschen Programms wäre vor allem notwendig zu zeigen, daß die Zulassung immer höherer Stufen die entstehenden

¹ D. HILBERT, Über das Unendliche, *Math. Annalen*, **95** (1926), S. 161 – 190.

Funktionenklassen immer erweitert: daß es z. B. rekursive Funktionen der II-ten Stufe gibt, die auf der I-ten Stufe nicht definiert werden können. ACKERMANN² hat das für den Fall bewiesen, wo man sich auf *einfache* Rekursionen beschränkt (d. h. wobei die Rekursion nach einer einzigen Variablen verläuft): er hat nämlich gezeigt, daß die α -te Funktion, die man durch sukzessive Iterationen aus der Addition gewinnt, angewandt auf α und α , sämtliche einfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe majorisiert, und auf der II-ten Stufe durch einfache Rekursionen definiert werden kann.

Aber ACKERMANN hat für seine Funktion auch eine rekursive Definition auf der I-ten Stufe angegeben, wobei die Rekursion „zweifach“ ist, d. h. nach zwei Variablen simultan verläuft (in solchem Fall heißt die definierte Funktion „2-rekursiv“). Werden sowohl auf der I-ten, wie auf der II-ten Stufe auch *mehrfache* (nach mehreren Variablen verlaufende) Rekursionen zugelassen (und somit „ k -rekursive“ Funktionen für beliebige k definiert), so ist es bis heute noch nicht entschieden, ob die Zulassung der II-ten Stufe die Klasse der rekursiven Funktionen der I-ten Stufe erweitert oder nicht.

3. In einem Vortrag am Internationalen Mathematikerkongreß in Oslo (1936) habe ich behauptet, daß die Klasse der mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe mit der Klasse der einfach-rekursiven Funktionen der II-ten Stufe identisch ist. Ich konnte nämlich beweisen, daß sich eine jede *mehrfache* Rekursion der I-ten Stufe auf der II-ten Stufe auf einfache Rekursionen auflösen läßt³ (den allgemeinen Beweis dieser Tatsache gebe ich in § 1); ferner hatte ich eine sehr verwickelte Methode zur Zurückführung der einfachen „*primitiv-rekursiven*“ Definition einer Funktion der II-ten Stufe auf eine *mehrfache* Rekursion der I-ten Stufe (meine Notizen über die letztere Methode sind während des Krieges verloren gegangen). Eine Rekursion heißt dabei *primitiv*, wenn die in der Rekursion nicht teilnehmenden Variablen („Parameter“ genannt) unverändert bleiben, also keine Einsetzungen für die Parameter erfolgen (jedoch können die Parameter auf der II-ten Stufe „gebunden“ sein); und es ist mir früher gelungen zu beweisen,⁴ daß auf der I-ten Stufe sämtliche Rekursionen, in welchen für die Parameter die verwickeltesten (sogar von früheren Werten der zu definierenden Funktion abhängigen) Einsetzungen erfolgen („eingeschachtelte Rekursionen“ genannt), auf einfache primitive Rekursionen und Substitutionen aufgelöst werden können. Die am Osloer Kongreß ausgesprochene Behauptung beruhte auf der Annahme,

² W. ACKERMANN, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Math. Annalen*, **99** (1928), S. 118—133.

³ R. PÉTER, *Rekursive Funktionen* (Akademischer Verlag, Budapest, 1950), S. 97—102.

⁴ R. PÉTER, Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen*, **110** (1934), S. 612—632. — Siehe noch: A rekurziv függvények elméletéhez (Ungarisch mit deutschem Auszug), *Matematikai és Fizikai Lapok*, **42** (1935), S. 25—49.

daß diese Auflösung auch auf der II-ten Stufe möglich ist. Aber in gewissen — für die II-te Stufe charakteristischen — Fällen würde das gleiche Auflösungsverfahren die Definition einer unendlich-vielstelligen Funktion (genauer gesagt: einer Funktion mit einer veränderlichen Anzahl von Variablen) erfordern, wie in § 4 vorliegender Arbeit gezeigt wird.

4. In § 2 gebe ich eine durchaus einfache neue Methode zur Zurückführung der *primitiv-rekursiven* Definition einer Funktion der II-ten Stufe auf eine mehrfache Rekursion der I-ten Stufe. Die Methode läßt sich ohne weiteres auch auf *solche eingeschachtelten* Rekursionen anwenden, die ähnlich wie auf der I-ten Stufe gebildet werden, nämlich auf solche, wobei nur an Stelle von Zahlenvariablen Einschachtelungen erfolgen; sogar dann, wenn es sich um eine mehrfache Rekursion der II-ten Stufe handelt; dies sieht man deutlich am Beispiel des § 3.

Die betrachtete Art einfache eingeschachtelte Rekursion läßt sich auf der II-ten Stufe sogar auf Substitutionen und primitive Rekursion zurückführen.

So scheint es im ersten Augenblick, als ob die II-te Stufe gar nicht mehr liefern könnte, als die I-te.

5. Es kann jedoch auf der II-ten Stufe auch eine neue Art eingeschachtelte Rekursion auftreten: eine solche, wobei Einschachtelungen auch an den Stellen der *Funktionsvariablen* erfolgen. Wie das Beispiel in § 4 zeigt: wenn die Methode in einem solchen Fall angewandt wird, so erhält man auf der I-ten Stufe die mehrfach-rekursive Definition einer Funktion δ von unendlich vielen Variablen; d. h. es hängt von einem der Argumente ab, wievielstellig bei diesem Argument δ ist. Eine solche Funktion kann auch durch Substitution einfach-rekursiver Funktionen aus einer einstelligen Funktion erhalten werden, welche durch eine transfinite Rekursion vom Typus ω^ω definiert wird.

6. So liegt es nahe zu glauben, daß die unendlich-vielstellige Diagonalfunktion ψ der mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe⁵ (welche sich von allen mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe unterscheidet) ebenfalls zu den rekursiven Funktionen der II-ten Stufe gehört; diese Diagonalfunktion läßt sich ja ebenso wie δ mit Hilfe einer mehrfachen Rekursion mit variabler Vielfachheit (oder mit Hilfe einer transfiniten Rekursion vom Typus ω^ω) definieren. Könnte man das beweisen, so hätte man ein Beispiel für eine rekursive Funktion der II-ten Stufe, welche nicht zur Klasse der rekursiven Funktionen der I-ten Stufe gehört.

Betrachtet man aber näher die „unendlich-vielfache“ Rekursion, welche unsere Funktion δ , und jene unendlich vielfache Rekursion, welche die Diagonalfunktion ψ definiert, so entdeckt man einen Unterschied, den ich folgenderweise bezeichnen werde: die Definition von ψ ist „vollzählig-mehr-

⁵ R. PÉTER, Zusammenhang der mehrfachen und transfiniten Rekursionen, *Journal of Symbolic Logic*, 15 (1950), S. 248—272.

fach“, die Definition von δ dafür „zerstreut-mehrfach“. Ergibt sich nämlich nach der Angabe eines gewissen Argumentes, daß ψ dabei z. B. r -stellig ist, so müssen (für $n_1, n_2, \dots, n_r \neq 0$) zum Aufbau von $\psi(n_1, n_2, \dots, n_r)$ sowohl solche Funktionswerte angewandt werden, wobei das erste Argument kleiner als n_1 ist, wie auch solche, wobei das erste Argument n_1 , das zweite kleiner als n_2 ist, und so weiter lückenlos ganz bis zum Funktionswert $\psi(n_1, \dots, n_{r-1}, n_r - 1)$. Bei der Definition von δ gibt es aber eine ganz bestimmte Zahl k , so daß, wie groß auch r sein mag, wenn sich δ nach der Angabe eines gewissen Argumentes als r -stellig ergibt, im Aufbau von $\delta(m_1, m_2, \dots, m_r)$ bloß solche frühere Funktionswerte teilnehmen, bei welchen höchstens k der Argumente (aber an anderen Stellen andere) kleiner als das entsprechende m_1, m_2, \dots oder m_r sind, während die früheren Argumente den entsprechenden m_1, m_2, \dots gleich sind.

7. In § 5 werden offene Probleme bezüglich der „zerstreut-transfiniten“ Rekursion dargelegt. Die Frage, ob es uneinschmelzbare Zwischendinge zwischen den transfiniten Rekursionen vom Typus ω^k mit endlichem k und zwischen der vollzähligen Rekursion vom Typus ω^ω gibt, lautet gewissermaßen ähnlich, wie das Kontinuumproblem.

Zum Beweis, daß die II-te Stufe umfassender als die I-te ist, bietet sich außer dem Diagonalverfahren eine Ausdehnung des Ackermanschen Beispiels. Das Ackermansche Majorisierungsverfahren kann aber, wie in § 5 nahegelegt wird, für mehrfache Rekursionen nur soviel ergeben, daß es eine durch $k + 1$ einfache Rekursionen der II-ten Stufe definierte Funktion gibt, die keine k -rekursive Funktion der I-ten Stufe ist (was auch viel einfacher eingesehen werden kann); so kommt man aber auch nicht zu einer Funktion der II-ten Stufe, welche von sämtlichen mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe verschieden ausfallen, nämlich sämtliche solche Funktionen insgesamt majorisieren würde.

Man gewinnt den Eindruck, daß die Ausdehnung des Begriffes der rekursiven Funktion der I-ten Stufe, wie man es auch versucht, ganz natürlich die Einführung einer veränderlichen Anzahl von Variablen, einer veränderlichen Anzahl von Definitionsgleichungen erfordert. Daß es bisher nicht gelungen ist, die meisten Probleme der II-ten Stufe zu lösen, hängt damit zusammen, daß man sich auch auf der II-ten Stufe auf Funktionen mit einer festen Anzahl von Variablen beschränkt, welche durch eine feste Anzahl von Substitutionen und Rekursionen definiert werden.

II.

8. Ich werde folgende Zeichen benutzen: für Zahlen und Zahlvariablen kleine lateinische Buchstaben (wenn die Zahlenvariablen gebunden sind, vom Ende des Alphabetes); für Funktionen und Funktionsvariablen kleine griechische Buchstaben; für Funktionsfunktionen große lateinische Buchstaben. Gebundene

Variablen werden in jenem Sinne verstanden, wie in einem Integral

$$\int_a^b \varphi(x) dx$$

die Variable x gebunden ist: der Wert dieses Integrals hängt nicht von x , sondern von $\varphi(x)$ als Funktion von x und von den Zahlen a und b ab. Ein Ausdruck, der von mehreren Variablen abhängt, kann als Funktion von beliebigen seiner Variablen aufgefaßt werden; um zu bezeichnen, welche diese Variablen sind, benutze ich das von CHURCH⁶ eingeführte Zeichen λ . So bedeutet z. B.

$$\lambda x[a^x]$$

die Funktion a^x als Funktion des Exponenten; und wird das für q in eine Funktionsfunktion

$$A(q; b)$$

eingesetzt, wobei q eine einstellige Funktionsvariable ist, so entsteht eine zahlentheoretische Funktion von a und b . Ist hier z. B.

$$A(q; b) = \varphi(b^2),$$

so ist

$$A(\lambda x[a^x]; b) = a^{b^2}.$$

Die verschiedenartigen Variablen werde ich auch in den Folgenden durch einen Strichpunkt trennen.

Bezüglich der allgemeinen Kenntnisse über rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch,⁷ worin diese zusammengefaßt wurden. Die gebräuchlichsten Funktionen der elementaren Zahlentheorie haben sich alle als einfach-primitiv-rekursiv auf der I-ten Stufe erwiesen, so z. B. auch die in den Folgenden benutzten Funktionen

$$p_0 = 2$$

$$p_{n+1} = \text{die } n+2\text{-te Primzahl} \left\{ , \right.$$

$\exp_\alpha(n)$ — der Exponent von p_α in der Primfaktorenzerlegung von n ,

$\max(n_1, \dots, n_k)$ — das größte von n_1, \dots, n_k .

⁶ A. CHURCH, A set of postulates for the foundation of logic, *Ann. of Math.*, **34** (1933), S. 863.

⁷ Siehe Fußnote 3.

§ 1. Auflösung der mehrfachen Rekursionen der I-ten Stufe auf einfache Rekursionen der II-ten Stufe

1. In einigen Spezialfällen habe ich bereits gezeigt,⁸ wie sich die mehrfachen Rekursionen der I-ten Stufe auf einfache Rekursionen der II-ten Stufe auflösen lassen. Der allgemeine Beweis kann genau so geführt werden.

Die allgemeine k -fache Rekursion läßt sich auf folgende „Normalform“ zurückführen⁹ (für $n_1 \cdot n_2 \dots n_k = 0$ könnte der Wert von $\alpha(n_1, n_2, \dots, n_k)$ beliebig gewählt werden):

$$\alpha(n_1, n_2, \dots, n_k) = 0, \text{ falls } n_1 \cdot n_2 \dots n_k = 0$$

$$\alpha(n_i + 1, \dots, n_k + 1) = \beta(n_1, \dots, n_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k),$$

wo für $i = 1, 2, \dots, k$

$$\alpha_i = \alpha(n_i + 1, \dots, n_{i-1} + 1, n_i, \gamma_1^{(i)}(n_1, \dots, n_k, \alpha(n_i + 1, \dots, n_{i-1} + 1, n_k)), \dots$$

$$\dots, \gamma_{k-i}^{(i)}(n_1, \dots, n_k, \alpha(n_i + 1, \dots, n_{i-1} + 1, n_k))),$$

wobei die Funktionen β und $\gamma_j^{(i)}$ für $i = 1, 2, \dots, k-1$; $j = 1, 2, \dots, k-i$ aus den in der ursprünglichen (nicht normierten) Definition angewandten Funktionen (aus den „Bausteinen“ von α) durch einfache primitive Rekursionen der I-ten Stufe und Substitutionen aufgebaut werden können.

Nun werde ich diese Definition auf k einfache Rekursionen der II-ten Stufe auflösen. Sei $k > 1$. Werden die Funktionen

$$\alpha(n_1, x_1, \dots, x_{k-1}), \alpha(n_1 + 1, n_2, x_1, \dots, x_{k-2}), \dots, \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-2} + 1, n_{k-1}, x_1)$$

durch die Funktionsvariablen q_1, q_2, \dots, q_{k-1} ersetzt, so ergibt die Definition statt $\alpha_k = \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k)$ eine Funktionsfunktion $A_0(q_1, \dots, q_{k-1}; n_1, \dots, n_k)$:

$$A_0(q_1, \dots, q_{k-1}; n_1, \dots, n_{k-1}, 0) = 0$$

$$A_0(q_1, \dots, q_{k-1}; n_1, \dots, n_{k-1}, n_k + 1) =$$

$$\beta(n_1, \dots, n_k, B_1, \dots, B_{k-1}, A_0(q_1, \dots, q_{k-1}; n_1, \dots, n_k)),$$

wobei für $i = 1, 2, \dots, k-1$

$$B_i = q_i(\gamma_1^{(i)}(n_1, \dots, n_k, A_0(q_1, \dots, q_{k-1}; n_1, \dots, n_k)), \dots$$

$$\dots, \gamma_{k-i}^{(i)}(n_1, \dots, n_k, A_0(q_1, \dots, q_{k-1}; n_1, \dots, n_k))).$$

Man sieht leicht, daß

$$A_0(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [\alpha(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \lambda x_1 \dots x_{k-2} [\alpha(n_1 + 1, n_2, x_1, \dots, x_{k-2})], \dots$$

$$\dots, \lambda x_1 [\alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-2} + 1, n_{k-1}, x_1)]; n_1, \dots, n_k) = \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k)$$

gilt. Für $n_k = 0$ steht nämlich an beiden Seiten 0; und wenn die Behauptung für ein n_k bereits gilt, so ist

⁸ Siehe Fußnote 8.

⁹ R. PÉTER, Über die mehrfache Rekursion, *Math. Annalen*, 113 (1936), S. 489—527

$$\begin{aligned}
 & A_0(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [\alpha(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \lambda x_1 [\alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-2} + 1, n_{k-1}, x_1)] ; \\
 & \quad ; n_1, \dots, n_{k-1}, n_k + 1) = \\
 & = \beta(n_1, \dots, n_k, B'_1, \dots, B'_{k-1}, A_0(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [\alpha(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \\
 & \quad \dots, \lambda x_1 [\alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-2} + 1, n_{k-1}, x_1)] ; n_1, \dots, n_k)) = \\
 & = \beta(n_1, \dots, n_k, B'_1, \dots, B'_{k-1}, \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k)),
 \end{aligned}$$

wobei für $i = 1, 2, \dots, k-1$

$$\begin{aligned}
 B'_i &= \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{i-1} + 1, n_i, \gamma_1^{(i)}(n_1, \dots, n_k, \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k)), \dots, \\
 & \quad \dots, \gamma_{k-i}^{(i)}(n_1, \dots, n_k, \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k))) = \alpha_i;
 \end{aligned}$$

nach der Definition von α ist daher

$$\begin{aligned}
 & \beta(n_1, \dots, n_k, B'_1, \dots, B'_{k-1}, \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k)) = \\
 & = \beta(n_1, \dots, n_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k)) = \alpha(n_1 + 1, \dots, n_k + 1).
 \end{aligned}$$

So überträgt sich die Behauptung von n_k auf $n_k + 1$; demnach gilt sie allgemein.

Die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
 & \alpha(n_1, \dots, n_k) = 0, \text{ falls } n_1 \cdot n_2 \dots n_{k-1} = 0 \\
 & \alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1, n_k) = A_0(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [\alpha(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \\
 & \quad \dots, \lambda x_1 [\alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-2} + 1, n_{k-1}, x_1)] ; n_1, \dots, n_k)
 \end{aligned}$$

ergeben eine $k-1$ -fache Rekursion der II-ten Stufe für α .

2. Ich werde aber jetzt die Einsetzungen von $\lambda x_1 \dots x_{k-1} [\alpha(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \lambda x_1 [\alpha(n_1 + 1, \dots, n_{k-2} + 1, n_{k-1}, x_1)]$ für $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ schrittweise ausführen; so gelange ich über lauter einfache Rekursionen zu α .

Sei also

$$\begin{aligned}
 & A_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-2}; n_1, \dots, n_{k-2}, 0, n_k) = 0 \\
 & A_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-2}; n_1, \dots, n_{k-2}, n_{k-1} + 1, n_k) = \\
 & = A_0(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-2}, \lambda x_1 [A_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-2}; n_1, \dots, n_{k-1}, x_1)] ; n_1, \dots, n_k), \\
 & A_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-3}; n_1, \dots, n_{k-3}, 0, n_{k-1}, n_k) = 0 \\
 & A_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-3}; n_1, \dots, n_{k-3}, n_{k-2} + 1, n_{k-1}, n_k) = \\
 & = A_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-3}, \lambda x_1 x_2 [A_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-3}; n_1, \dots, n_{k-2}, x_1, x_2)] ; n_1, \dots, n_k), \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

für $0 < i < k$

$$\begin{aligned}
 & A_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1-i}; n_1, \dots, n_{k-1-i}, 0, n_{k+1-i}, \dots, n_k) = 0 \\
 & A_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1-i}; n_1, \dots, n_{k-1-i}, n_{k+1-i} + 1, n_{k+1-i}, \dots, n_k) = \\
 & = A_{i-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1-i}, \lambda x_1 \dots x_i [A_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1-i}; n_1, \dots, n_k, x_1, \dots, x_i)] ; n_1, \dots, n_k), \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

zuletzt

$$\begin{aligned}
 & A_{k-1}(0, n_2, \dots, n_k) = 0 \\
 & A_{k-1}(n_1 + 1, n_2, \dots, n_k) = A_{k-2}(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [A_{k-1}(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})] ; n_1, \dots, n_k).
 \end{aligned}$$

So ist $A_{k-1}(n_1, \dots, n_k)$ eigentlich keine Funktionsfunktion mehr, sondern eine zahlentheoretische Funktion. Ich behaupte, daß

$$A_{k-1}(n_1, \dots, n_k) = \alpha(n_1, \dots, n_k)$$

gilt. Das ergibt sich leicht aus folgendem

HILFSSATZ. Für $r = 0, 1, \dots, k-1$ gilt

$$A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_r+1, n_{r+1}, \dots, n_k) = A_{k-1-r}(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [A_{k-1}(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \lambda x_1 \dots x_{k-r} [A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \dots, x_{k-r})]; n_1, \dots, n_k).$$

Dies ist nämlich für $r = 0$ trivial; und falls die Behauptung für ein $r < k-1$ bereits gilt, so folgt durch Einsetzung von $n_{r-1}+1$ für n_{r-1}

$$A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{r+1}+1, n_{r+2}, \dots, n_k) = A_{k-1-r}(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [A(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \lambda x_1 \dots x_{k-r} [A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \dots, x_{k-r})]; n_1, \dots, n_r, n_{r-1}+1, n_{r+2}, \dots, n_k).$$

Hier kann aber die rechte Seite nach der Definition auch als

$$A_{k-1-(r+1)}(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [A_{k-1}(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \lambda x_1 \dots x_{k-r} [A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \dots, x_{k-r})], \lambda y_1 \dots y_{k-1-r} [A_{k-1-r}(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [A_{k-1}(n_1, x_1, \dots, x_{k-r})], \dots, \lambda x_1 \dots x_{k-r} [A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \dots, x_{k-r})]); n_1, \dots, n_{r+1}, y_1, \dots, y_{k-1-r}]); n_1, \dots, n_k)$$

geschrieben werden, und nach der Annahme ist darin

$$A_{k-1-r}(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [A_{k-1}(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \lambda x_1 \dots x_{k-r} [A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \dots, x_{k-r})]; n_1, \dots, n_{r-1}, y_1, \dots, y_{k-1-r}) = A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_r+1, n_{r+1}, y_1, \dots, y_{k-1-r});$$

so ist endlich (die gebundenen Variablen y_1, \dots, y_{k-1-r} wieder mit x_1, \dots, x_{k-1-r} bezeichnet)

$$A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{r+1}+1, n_{r+2}, \dots, n_k) = A_{k-1-(r+1)}(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [A_{k-1}(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \lambda x_1 \dots x_{k-r} [A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{r-1}+1, n_r, x_1, \dots, x_{k-r})], \lambda x_1 \dots x_{k-1-r} [A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_r+1, n_{r+1}, x_1, \dots, x_{k-1-r})]; n_1, \dots, n_k).$$

Die Gültigkeit des Hilfssatzes überträgt sich also von r auf $r+1$, solange $r < k-1$ ist; und demnach gilt der Hilfssatz allgemein.

3. Speziell für $r = k-1$ ergibt der Hilfssatz:

$$A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1, n_k) = A_0(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [A_{k-1}(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \lambda x_1 [A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)]; n_1, \dots, n_k).$$

Nun komme ich zum Beweis von

$$A_{k-1}(n_1, \dots, n_k) = \alpha(n_1, \dots, n_k).$$

Erstens gilt diese Behauptung für $n_1, n_2, \dots, n_k = 0$. In diesem Fall ist nämlich $\alpha(n_1, \dots, n_k) = 0$; und falls das erste verschwindende Argument n_{r+1} ist, so

ist der Wert von $A_{k-1}(n_1, \dots, n_k)$ mit dem Wert von A_{k-1-r} an einer solchen Stelle identisch, wo für die $r+1$ -te Zahlenvariable 0 eingesetzt wird; an einer solchen Stelle ist aber nach der Definition der Wert von A_{k-1-r} auch 0.

Nehmen wir jetzt an, daß die Behauptung bereits für alle Vorgänger einer Stelle (n_1+1, \dots, n_k+1) gilt (als Vorgänger werden solche Stellen betrachtet, wo das erste Argument n_1 , oder das erste Argument n_1+1 , das zweite n_2 , usw., endlich wo das erste Argument n_1+1 , das zweite n_2+1, \dots , das $k-1$ -te $n_{k-1}+1$, und das k -te n_k ist). Dann ergibt sich aus dem Hilfssatz für $r=k-1$

$$A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_k+1) = A_0(\lambda x_1 \dots x_{k-1} [\alpha(n_1, x_1, \dots, x_{k-1})], \dots, \lambda x_1 [\alpha(n_1+1, \dots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)]; n_1, \dots, n_k).$$

Von der rechten Seite hat es sich aber in Nr. 1 bereits herausgestellt, daß sie mit $\alpha(n_1+1, \dots, n_k+1)$ identisch ist. Es ist also tatsächlich

$$A_{k-1}(n_1+1, \dots, n_k+1) = \alpha(n_1+1, \dots, n_k+1).$$

So ist es gelungen, die Funktion $\alpha(n_1, \dots, n_k)$, welche ursprünglich aus gewissen schon früher definierten „Bausteinen“ durch eine k -fache Rekursion definiert wurde, durch k einfache Rekursionen der II-ten Stufe zu definieren. Da aber sämtliche mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe von 0 und $n+1$ ausgehend durch eine endliche Kette von Substitutionen und mehrfachen Rekursionen der I-ten Stufe aufgebaut werden können, folgt daraus, daß sich diese Funktionen alle auch durch Substitutionen und einfache Rekursionen der II-ten Stufe aufbauen lassen. Dabei hat man auf der II-ten Stufe zu den Grundfunktionen 0 und $n+1$ auch die Grundfunktionsfunktionen

$$V_1(\varphi; a) = \varphi(a), \quad V_2(\varphi; a_1, a_2) = \varphi(a_1, a_2), \dots, \quad V_i(\varphi; a_1, \dots, a_i) = \varphi(a_1, \dots, a_i), \dots$$

hinzuzunehmen.

§ 2. Zurückführung der primitiven Rekursionen der II-ten Stufe auf mehrfache Rekursionen der I-ten Stufe

1. Betrachten wir nun ein einfaches Beispiel einer rekursiven Funktion der II-ten Stufe. Sei

$$\begin{aligned} \alpha(0, a) &= a \\ \alpha(n+1, a) &= B(\lambda x [\alpha(n, x)]; n, a), \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} B(\varphi; 0, a) &= \varphi(a^2) \\ B(\varphi; n+1, a) &= C(\lambda x [B(\varphi; n, x)]; n, a), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} C(\varphi; 0, a) &= \varphi(a) \\ C(\varphi; n+1, a) &= \varphi(C(\varphi; n, a)). \end{aligned}$$

2. Ich nenne diese Rekursionen primitiv, obwohl der Parameter α von α und B in $B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a)$ und in $C(\lambda x[B(q; n, x)]; n, a)$ nicht unverändert geblieben ist. Eine solche Bindung des Parameters ist aber unvermeidlich auf der II-ten Stufe. Denn die Definition soll eine zahlentheoretische Funktion ergeben, durch Vermittelung gewisser Funktionsfunktionen. Es treten also im Aufbau der definierten Funktion auch Funktionsvariablen auf; diese müssen aber zum Schluß verschwinden. Verschwinden sie bloß dadurch, daß bekannte Funktionen für sie eingesetzt werden, so hätte man von Anfang an statt Funktionsvariablen diese bekannten Funktionen anwenden können, und so hätte man garnicht aus der I-ten Stufe heraustreten sollen. (Vgl. die Methode der „Rückverlegung der Einsetzungen“ in der Beweistheorie.) Durch eine Rekursion verschwindet aber eine Funktionsvariable bloß dann, wenn die zu definierende Funktion, mit kleineren Werten der Rekursionsvariablen, als Funktion gewisser Parameter für sie eingesetzt wird.

In der Definition von B (oder von α) könnte freilich ein früherer Funktionswert auch für eine Zahlenvariable eingesetzt werden. Ein solcher Fall läßt sich aber immer auf einen Fall, wo die Einsetzung des früheren Funktionswertes (als Funktion gewisser Parameter betrachtet) für eine Funktionsvariable erfolgt, und auf Substitution zurückführen. Betrachten wir z. B. folgende Definition:

$$B_1(q; 0, a) = q(a^2)$$

$$B_1(q; n+1, a) = C(q; B_1(q; n, a), a).$$

Sei

$$C_1(q, \psi; a) = C(q; \psi(a), a),$$

so ist

$$B_1(q; n+1, a) = C_1(q, \lambda x[B_1(q; n, x)]; a).$$

3. Nun kehren wir zurück zur obigen Definition von $\alpha(n, a)$. Diese Definition ist darum eine Rekursion der II-ten Stufe, weil darin außer der zu definierenden zahlentheoretischen Funktion $\alpha(n, a)$ auch die Funktionsfunktionen $B(q; n, a)$ und $C(q; n, a)$ vorkommen. Offenbar braucht man aber diese Funktionsfunktionen zur Definition von $\alpha(n, a)$ nicht für eine beliebige Funktion q , sondern nur für gewisse spezielle (selbstverständlich mit der zu definierenden Funktion α in einem gewissen Zusammenhang stehende) Funktionen; z. B. braucht man die Funktionsfunktion B nur für $q = \lambda x[\alpha(n, x)]$. Eine Funktionsfunktion geht aber für eine spezielle Wahl ihrer Funktionsvariablen in eine Funktion von Zahlenvariablen über. Daher kann man versuchen, die Definition von α sozusagen auf die I-te Stufe zu übersetzen, indem man die Funktionsfunktionen B und C durch jene zahlentheoretischen Funktionen ersetzt, die aus ihnen durch Einsetzung derjenigen speziellen Funktionen für q entstehen, für die man jene Funktionsfunktionen zur Definition von $\alpha(n, a)$ braucht. (Falls dabei B oder C für mehrere, für q eingesetzte, spezielle Funktionen gebraucht wird, so wird sie natürlich durch mehrere zahlentheoretische Funktionen ersetzt.)

Dieser Zurückführungsgedanke läßt sich aber nicht ohne weiteres durchführen. In der Tat, man kann statt der Funktionsfunktion $B(q; n, a)$ nicht die zahlentheoretische Funktion

$$\beta(n, a) = B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a)$$

durch Rekursion definieren, da $B(q; n, a)$ durch Rekursion nach seinem zweiten Argument n definiert wurde, und n kommt in $\beta(n, a)$ auch als Argument von $\lambda x[\alpha(n, x)]$ vor. Wird daher

$$\beta(n+1, a) = B(\lambda x[\alpha(n+1, x)]; n+1, a)$$

mit Hilfe der zweiten Rekursionsgleichung von B berechnet, so erhält man

$$\beta(n+1, a) = C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n+1, y)]; n, x]); n, a)$$

und hier kann man statt $B(\lambda y[\alpha(n+1, y)]; n, x)$ nicht die Funktion β einführen (auch nicht durch Verwendung der zweiten Rekursionsgleichung von α , die nur

$$\begin{aligned}\beta(n+1, a) &= C(\lambda x[B(\lambda y[B(\lambda z[\alpha(n, z)]; n, y]); n, x]); n, a) = \\ &= C(\lambda x[B(\lambda y[\beta(n, y)]; n, x]); n, a)\end{aligned}$$

ergibt, wobei man $B(\lambda y[\beta(n, y)]; n, x)$ wiederum nicht durch β allein ausdrücken kann).

Daher soll die Rekursionsvariable n von B von dem mit ihr zufällig zusammenfallenden Argument n von $\lambda x[\alpha(n, x)]$ unterschieden werden, d. h. es soll statt der obigen Funktion $\beta(n, a)$ die Funktion

$$\beta(n_1, n_2, a) = B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2, a)$$

betrachtet werden. Mit Hilfe dieser Funktion läßt sich die zweite Rekursionsgleichung der Funktion $\alpha(n, a)$ wie folgt schreiben:

$$\alpha(n+1, a) = \beta(n, n, a).$$

Ferner gilt nach der ersten Rekursionsgleichung der Funktionsfunktion $B(q; n, a)$ die Gleichung

$$\beta(n_1, 0, a) = B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; 0, a) = \alpha(n_1, a^2),$$

und nach der zweiten Rekursionsgleichung von B ,

$$\begin{aligned}\beta(n_1, n_2+1, a) &= B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2+1, a) = \\ &= C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, x]); n_2, a) = C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_2, a).\end{aligned}$$

So braucht man zur Definition der Funktion $\beta(n_1, n_2, a)$ (statt der Funktionsfunktion $C(q; n, a)$ für eine beliebige Funktion q) nur die zahlentheoretische Funktion

$$\gamma(n_1, n_2, a) = C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_2, a).$$

Nun ist es aus dem gleichen Grunde wie vorher nötig, die Rekursionsvariable n_2 von C von dem mit ihr zufällig zusammenfallenden Argument n_2 von $\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]$ zu unterscheiden, d. h. statt dieser dreistelligen Funktion γ die vierstellige Funktion

$$\gamma(n_1, n_2, n_3, a) = C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_3, a)$$

zu betrachten. Mit Hilfe dieser Funktion läßt sich die zuletzt für $\beta(n_1, n_2 + 1, a)$ erhaltene Gleichung wie folgt schreiben:

$$\beta(n_1, n_2 + 1, a) = \gamma(n_1, n_2, n_2, a);$$

ferner gelten nach den Rekursionsgleichungen der Funktionsfunktion $C(q; n, a)$ die Gleichungen

$$\gamma(n_1, n_2, 0, a) = C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; 0, a) = \beta(n_1, n_2, a)$$

$$\begin{aligned} \gamma(n_1, n_2, n_3 + 1, a) &= C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_3 + 1, a) \\ &= \beta(n_1, n_2, C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, x)]; n_3, a)) = \beta(n_1, n_2, \gamma(n_1, n_2, n_3, a)). \end{aligned}$$

4. Die hiermit erhaltene simultane Definition

$$\begin{aligned} \alpha(0, a) &= a, \\ \alpha(n_1 + 1, a) &= \beta(n_1, n_1, a), \\ \beta(n_1, 0, a) &= \alpha(n_1, a^2), \\ \beta(n_1, n_2 + 1, a) &= \gamma(n_1, n_2, n_2, a), \\ \gamma(n_1, n_2, 0, a) &= \beta(n_1, n_2, a), \\ \gamma(n_1, n_2, n_3 + 1, a) &= \beta(n_1, n_2, \gamma(n_1, n_2, n_3, a)) \end{aligned}$$

der zahlentheoretischen Funktionen α , β und γ läßt sich leicht zu einer 4-fachen Rekursion zusammenziehen: als vierte Rekursionsvariable wird der „Index“ dieser Funktionen auftreten. Ein jeder Funktionswert ist hier nämlich entweder mit Hilfe eines an früherer Stelle angenommenen Wertes, oder mit Hilfe einer „früheren“ Funktion definiert.

Sei also

$$\begin{aligned} \delta(n_1, n_2, n_3, 0, a) &= \alpha(n_1, a), \\ \delta(n_1, n_2, n_3, 1, a) &= \beta(n_1, n_2, a), \\ \delta(n_1, n_2, n_3, i + 2, a) &= \gamma(n_1, n_2, n_3, a). \end{aligned}$$

(Die „Indexvariable“ i ließe sich übrigens auch in n_3 einschmälzen: man könnte δ auch folgenderweise definieren:

$$\begin{aligned} \delta(n_1, n_2, 3n_3, a) &= \alpha(n_1, a), \\ \delta(n_1, n_2, 3n_3 + 1, a) &= \beta(n_1, n_2, a), \\ \delta(n_1, n_2, 3n_3 + 2, a) &= \gamma(n_1, n_2, n_3, a); \end{aligned}$$

dann wäre δ 3-rekursiv.)

So lautet die Definition von δ :

$$\begin{aligned} \delta(0, n_2, n_3, 0, a) &= a \\ \delta(n_1 + 1, n_2, n_3, 0, a) &= \delta(n_1, n_1, n_3, 1, a) \\ \delta(n_1, 0, n_3, 1, a) &= \delta(n_1, 0, n_3, 0, a^2) \\ \delta(n_1, n_2 + 1, n_3, 1, a) &= \delta(n_1, n_2, n_2, 2, a) \\ \delta(n_1, n_2, 0, i + 2, a) &= \delta(n_1, n_2, 0, 1, a) \\ \delta(n_1, n_2, n_3 + 1, i + 2, a) &= \delta(n_1, n_2, n_3, 1, \delta(n_1, n_2, n_3, i + 2, a)) \end{aligned}$$

und das ist tatsächlich eine 4-fache Rekursion der I-ten Stufe. Dabei ist z. B.

$$\alpha(n, a) = \delta(n, 0, 0, 0, a).$$

So entsteht $\alpha(n, a)$ durch eine einfache Substitution aus δ , demnach ist sie eine mehrfach-rekursive Funktion der I-ten Stufe.

5. An diesem Beispiel werde ich auch genau nachprüfen, daß die durch $\delta(n_1, n_2, n_3, 0, a)$ definierte Funktion tatsächlich für beliebige n_2, n_3 mit der durch die ursprünglichen Rekursionen der II-ten Stufe definierten Funktion $\alpha(n_1, a)$ identisch ist. Die Behauptung lautet

$$(1) \quad \alpha(n_1, a) = \delta(n_1, n_2, n_3, 0, a).$$

Dies gilt für $n_1 = 0$, da in diesem Fall auf beiden Seiten a steht. Nehmen wir an, daß sie bereits für ein n_1 gilt. Dann werde ich, um ihre Gültigkeit für $n_1 + 1$ zu zeigen, wegen

$$\alpha(n_1 + 1, a) = B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_1, a) \text{ und } \delta(n_1 + 1, n_2, n_3, 0, a) = \delta(n_1, n_1, n_3, 1, a)$$

gleich allgemeiner

$$(2) \quad B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2, a) = \delta(n_1, n_2, n_3, 1, a)$$

für jedes n_3 beweisen.

Dies gilt für $n_2 = 0$, da nach den Definitionen und nach der Annahme in diesem Fall auf der rechten Seite

$$\delta(n_1, 0, n_3, 1, a) = \delta(n_1, 0, n_3, 0, a^2) = \alpha(n_1, a^2),$$

also auf beiden Seiten $\alpha(n_1, a^2)$ steht. Nehmen wir an, daß für ein n_2 bereits (2) gilt. Um auf $n_2 + 1$ zu schließen, beweise ich wegen

$$B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2 + 1, a) = C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, x]); n_2, a)$$

und

$$\delta(n_1, n_2 + 1, n_3, 1, a) = \delta(n_1, n_2, n_2, 2, a)$$

gleich allgemeiner

$$(3) \quad C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, x)]; n_3, a) = \delta(n_1, n_2, n_3, 2, a).$$

Das gilt für $n_3 = 0$, da in diesem Fall nach den Definitionen und der letzten Annahme auf der rechten Seite

$$\delta(n_1, n_2, 0, 2, a) = \delta(n_1, n_2, 0, 1, a) = B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2, a)$$

steht, und auch die linke Seite damit identisch ist. Nehmen wir an, daß (3) bereits für ein n_3 gilt. So gilt es auch für $n_3 + 1$, denn nach den Definitionen und Annahmen ist

$$\begin{aligned} \delta(n_1, n_2, n_3 + 1, 2, a) &= \delta(n_1, n_2, n_3, 1, \delta(n_1, n_2, n_3, 2, a)) = \\ &= B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, C(\lambda x_1[B(\lambda y_1[\alpha(n_1, y_1)]; n_2, x_1)]; n_3, a)) \\ &= C(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, x)]; n_3 + 1, a). \end{aligned}$$

Damit ist (3), dadurch (2) und dadurch (1) allgemein bewiesen.

6. Allgemein lautet die primitiv-einfach-rekursive Definition einer Funktionsfunktion :

$$\begin{aligned} A(\varphi_1, \dots, \varphi_r; 0, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) &= B(\varphi_1, \dots, \varphi_r; a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) \\ A(\varphi_1, \dots, \varphi_r; n+1, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) &= \\ &= C(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \lambda x_1 \dots x_t [A(\varphi_1, \dots, \varphi_r; n, a_1, \dots, a_s, x_1, \dots, x_t)] ; \\ &; n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t). \end{aligned}$$

Dabei sind

$B(\varphi_1, \dots, \varphi_r; a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$ und $C(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}; n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$ früher definierte Funktionsfunktionen (wobei φ_{r+1} eine t -stellige Funktionsvariable ist). Es komme diese Definition als ein Teil der Rekursion II-ter Stufe einer gewissen zahlentheoretischen Funktion η vor. Dann soll die Funktionsfunktion A nach dem vorher verwendeten Gedanken durch Einsetzung gewisser speziellen, von η abhängigen, Funktionen $\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_r$ (nämlich derjenigen, für welche die Funktionsfunktion A zur Definition von η gebraucht wird) durch eine zahlentheoretische Funktion

$$\alpha(c_1, \dots, c_u, n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) = A(\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_r; n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$$

ersetzt werden, wobei c_1, \dots, c_u die in $\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_r$ insgesamt vorkommenden Variablen sind (unter denen die Rekursionsvariable von A gewiß nicht vorkommt, da diese sonst von der entsprechenden Variablen C unterschieden werden muß). Für diese Funktion α gewinnt man aus den Rekursionsgleichungen von A die Definition

$$\begin{aligned} \alpha(c_1, \dots, c_u, 0, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) &= B(\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_r; a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) \\ \alpha(c_1, \dots, c_u, n+1, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) &= \\ &= C(\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_r, \lambda x_1 \dots x_t [A(\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_r; n, a_1, \dots, a_s, x_1, \dots, x_t)] ; \\ &; n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) \\ &= C(\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_r, \lambda x_1 \dots x_t [\alpha(c_1, \dots, c_u, n, a_1, \dots, a_s, x_1, \dots, x_t)] ; \\ &; n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t). \end{aligned}$$

Hier soll man analog für $B(\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_r; a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$ eine zahlentheoretische Funktion $\beta(c_1, \dots, c_u, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$ einführen; so lautet die erste Definitionsgleichung von α

$$\alpha(c_1, \dots, c_u, 0, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t) = \beta(c_1, \dots, c_u, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t).$$

Für

$$C(\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_r, \lambda x_1 \dots x_t [\alpha(c_1, \dots, c_u, n, a_1, \dots, a_s, x_1, \dots, x_t)] ; n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$$

kann man aber nicht unmittelbar eine zahlentheoretische Funktion $\gamma(c_1, \dots, c_u, n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$ einführen, sondern man hat zuerst, falls die Funktionsfunktion $C(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}; n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$ durch Rekursion definiert wurde, die Bezeichnung der Rekursionsvariablen in C (nicht aber innerhalb $\lambda x_1 \dots x_t [\alpha(c_1, \dots, c_u, n, a_1, \dots, a_s, x_1, \dots, x_t)]$) in eine neue Variable m

abzuändern, und für die so aus

$C(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r, \lambda x_1 \dots x_t [\alpha(c_1, \dots, c_n, n, a_1, \dots, a_s, x_1, \dots, x_t)]; a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$

entstehende Funktion eine Bezeichnung wie $\gamma(c_1, \dots, c_n, n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t, m)$ einzuführen. Um aber die Definition dieser Funktion wirklich aufzuschreiben, hätte man jedesmal dasjenige von $n, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t$ durch eine Bezeichnung anzugeben, das als Rekursionsvariable der Funktionsfunktion C dient; und dies für sämtliche in der Definition von γ vorkommende Funktionsfunktionen (da man sämtliche Rekursionsgleichungen II-ter Stufe von γ braucht, um ihre mehrfach-rekursive Definition I-ter Stufe angeben zu können). Dazu kommt noch die Komplikation, daß die Funktionsfunktion C zuweilen durch Substitution entstehen kann. Um also die Zurückführungsmethode der vorigen Nummer allgemein aufschreiben zu können, müßte man eine variable Anzahl von voneinander abhängigen Fallunterscheidungen in einer Formelfolge aufschreiben können, das geht aber ohne irgendeinen neuen bezeichnungstechnischen Gedanken nicht. (Es handelt sich um eine technische Schwierigkeit von der Art, vielleicht um eine noch größere, als jene, die man überwinden müßte, falls man etwa den Multiplikationssatz der Determinanten ohne die Determinantenbezeichnung aufschreiben wollte.)

Indessen scheint es mir ohne eine allgemeine Angabe der Reduktionsmethode plausibel zu sein, daß dieselbe Methode, die in der vorigen Nummer für einen Spezialfall durchgeführt wurde, für jede primitiv-einfach-rekursive Definition II-ter Stufe anwendbar ist.

Es können also sämtliche primitiv-einfach-rekursiven Funktionen der II-ten Stufe auch als mehrfach-rekursive Funktionen der I-ten Stufe definiert werden.

Der Gedankengang läßt sich ohne weiteres auch auf höhere Stufen übertragen; so lassen sich z. B. die primitiv-einfach-rekursiven Funktionsfunktionen der III-ten Stufe auch als mehrfach-rekursive Funktionsfunktionen der II-ten Stufe definieren.

§ 3. Anwendung der Methode auf eingeschachtelte (sogar mehrfache) Rekursionen, wobei sich nur Zahlenparameter verändern

1. Zur Analogie der eingeschachtelten Rekursion der I-ten Stufe können auf der II-ten Stufe z. B. solche Definitionen gebildet werden:

$$\begin{aligned}\alpha(0, a) &= a \\ \alpha(n+1, a) &= B(\lambda x [\alpha(n, x)]; n, a),\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}B(\varphi; 0, a) &= \varphi(a) \\ B(\varphi; n+1, a) &= J(\lambda x [B(\varphi; n, C(\varphi; n, a, B(\varphi; n, x)))]; n, a),\end{aligned}$$

wo J und C bereits definierte Funktionen sind; oder um gleich eine mehr-

fache eingeschachtelte Rekursion der II-ten Stufe zu betrachten:

$$\alpha(0, a) = a$$

$$\alpha(n+1, a) = B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a, a),$$

wobei

$$B(q; m, n, a) = q(a^2), \text{ falls } m \cdot n = 0$$

$$B(q; m+1, n+1, a) = J(\lambda x[B(q; m, B(q; m+1, n, x), a)]; m, n)$$

und

$$J(q; 0, a) = q(a)$$

$$J(q; n+1, a) = q(J(q; n, a)).$$

Verwenden wir unsere Methode auf die letztere Definition. Sei

$$B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2, n_3, a) = \beta(n_1, n_2, n_3, a)$$

(man muß die erste und zweite Zahlenvariable von $B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a, a)$, die zufällig mit der ersten Variablen von α in $\lambda x[\alpha(n, x)]$ bzw. mit der dritten Zahlenvariablen von $B(\lambda x[\alpha(n, x)]; n, a, a)$ übereinstimmen, von jenen Variablen unterscheiden, da sie beide Rekursionsvariablen von B sind; dann ist

$$\alpha(n+1, a) = \beta(n, n, a, a),$$

und

$$\begin{aligned} \beta(n_1, n_2, n_3, a) &= B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2, n_3, a) = \alpha(n_1, a^2), \text{ falls } n_2 \cdot n_3 = 0, \\ \beta(n_1, n_2+1, n_3+1, a) &= B(\lambda x[\alpha(n_1, x)]; n_2+1, n_3+1, a) = \\ &= J(\lambda x[B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2, B(\lambda y[\alpha(n_1, y)]; n_2+1, n_3, x), a)]; n_2, n_3) = \\ &= J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; n_2, n_3) \\ &= \iota(n_1, n_2+1, n_3, n_2, a), \end{aligned}$$

wobei $\iota(n_1, 0, n_3, n_1, a)$ beliebig, z. B. als 0 definiert werden kann, ferner

$$\iota(n_1, n_2+1, n_3, n_4, a) = J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; n_4, n_3)$$

ist, also

$$\begin{aligned} \iota(n_1, n_2+1, n_3, 0, a) &= J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; 0, n_3) = \\ &= \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, n_3), a), \\ \iota(n_1, n_2+1, n_3, n_4+1, a) &= J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; n_4+1, n_3) = \\ &= \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, J(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a)]; n_4, n_3)), a) = \\ &= \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, \iota(n_1, n_2, n_3, n_4, a))), a). \end{aligned}$$

Somit erhält man die folgende simultane Definition für die zahlentheoretischen Funktionen α, β und ι :

$$\alpha(0, a) = a,$$

$$\alpha(n_1+1, a) = \beta(n_1, n_1, a, a),$$

$$\beta(n_1, n_2, n_3, a) = \alpha(n_1, a^2), \text{ falls } n_2 \cdot n_3 = 0,$$

$$\beta(n_1, n_2+1, n_3+1, a) = \iota(n_1, n_2+1, n_3, n_2, a),$$

$$\iota(n_1, n_2+1, n_3, 0, a) = \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, n_3), a),$$

$$\iota(n_1, n_2+1, n_3, n_4+1, a) = \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, \iota(n_1, n_2, n_3, n_4, a)), a).$$

Wird

$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 0, a) = \alpha(n_1, a),$$

$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 1, a) = \beta(n_1, n_2, n_3, a),$$

$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, i+2, a) = \iota(n_1, n_2, n_3, n_4, a)$$

gesetzt, so läßt sich δ genau so, wie in Nr. 4 des § 2 durch eine mehrfache (hier 5-fache) Rekursion der I-ten Stufe definieren; und aus δ ergibt sich α zum Beispiel durch die Substitution:

$$\alpha(n_1, a) = \delta(n_1, 0, 0, 0, 0, a).$$

2. Die einfachen eingeschachtelten Rekursionen der betrachteten Art lassen sich auf der II-ten Stufe auch leicht auf uneingeschachtelte Rekursionen und Substitutionen auflösen.

Betrachten wir z. B. das erste Beispiel der vorigen Nummer, worin die eingeschachtelte Rekursion

$$B(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$

$$B(\varphi; n+1, a) = J(\lambda x[B(\varphi; n, C(\varphi; n, a, B(\varphi; n, x))]); n, a)$$

teilgenommen hat. Wird eine Funktionsfunktion C_1 durch Substitution aus C und aus der Grundfunktionsfunktion $V(\psi; b) = \psi(b)$ wie folgt definiert:

$$C_1(\varphi, \psi; n, a, b) = \psi(C(\varphi; n, a, \psi(b))),$$

so lautet die zweite Definitionsgleichung von B :

$$B(\varphi; n+1, a) = J(\lambda x[C_1(\varphi, \lambda y[B(\varphi; n, y)]; n, a, x]); n, a).$$

Bildet man also durch Substitution aus J und C_1 die Funktionsfunktion

$$J_1(\varphi, \psi; n, a) = J(\lambda x[C_1(\varphi, \psi; n, a, x)]; n, a),$$

so kann B durch die primitive Rekursion

$$B(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$

$$B(\varphi; n+1, a) = J_1(\varphi, \lambda x[B(\varphi; n, x)]; n, a)$$

definiert werden.

Jedoch gibt es auf der II-ten Stufe eine neue Art von Einschachtelungen; und von diesen ist es zu erwarten, daß sie von der Klasse der rekursiven Funktionen der I-ten Stufe hinausführen.

§ 4. Einschachtelungen an den Stellen der Funktionsvariablen

1. Das Charakteristische der II-ten Stufe ist, daß hier auch Funktionsvariablen als Parameter auftreten; etwas Neues ist davon zu erwarten, wenn diese neuartigen Parameter sich bei einer Rekursion verändern.

Handelt es sich um eine einfache Rekursion, so kann eventuell auch dieser Fall auf primitive Rekursion und Substitutionen aufgelöst werden; mit der selben Methode, wie das auf der I-ten Stufe geschehen ist.¹⁰

¹⁰ Siehe Fußnote 4.

Wenden wir diese Methode z. B. auf die folgende Definition an:

$$A(\varphi; 0, a) = B(\varphi; a)$$

$$A(\varphi; n+1, a) = C(\lambda x[A(\lambda y[A(\varphi; n, y)]; n, x)]; n, a),$$

wobei B und C früher eingeführte Funktionsfunktionen sind.

Hier ist

$$A(\varphi; 0, a) = B(\varphi; a),$$

$$A(\varphi; 1, a) = C(\lambda x[A(\lambda y[A(\varphi; 0, y)]; 0, x)]; 0, a) =$$

$$= C(\lambda x[B(\lambda y[B(\varphi; y)]; x)]; 0, a),$$

$$\dots \dots \dots$$

Man sieht, daß sich die Werte von $A(\varphi; n, a)$ durch Ineinanderschachtelungen von $B(\varphi; a)$ und $C(\varphi; n, a)$ aufbauen, wobei für n in $C(\varphi; n, a)$ verschiedene Zahlen eingesetzt werden. Wird also eine Funktionsfunktion $D(\varphi; 0, a)$ durch

$$D(\varphi; 0, a) = \varphi(a)$$

und für $n \neq 0$

$$D(\varphi; n, a) = \begin{cases} B(\lambda x[D(\varphi; \exp_1(n), x)]; a), & \text{falls } \exp_0(n) = 0, \\ C(\lambda x[D(\varphi; \exp_1(n), x)]; \exp_2(n), a) & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, so kommen unter den Werten von $D(\varphi; n, a)$ auch die Werte von $A(\varphi; n, a)$ vor: man beweist genau so, wie auf der I-ten Stufe, daß es eine 1-rekursive Funktion $\kappa(n)$ der I-ten Stufe gibt, für welche

$$A(\varphi, n, a) = D(\varphi; \kappa(n), a)$$

gilt. (Die Definition von D ist noch keine primitive Rekursion, läßt sich aber — genau so, wie die ähnlichen „Wertverlaufsrekursionen“ der I-ten Stufe — auf primitive Rekursion und Substitution auflösen.)

2. Aber z. B. bei der Rekursion

$$A(\varphi; 0, a_1, a_2) = B(\varphi; a_1, a_2)$$

$$A(\varphi; n+1, a_1, a_2) = C(\lambda x y[A(\lambda z[A(\varphi; n, x, z)]; n, a_1, y)]; n, a_1, a_2)$$

versagt unsere Methode. Betrachtet man hier den Aufbau von

$$A(\varphi; 0, a_1, a_2), A(\varphi; 1, a_1, a_2), A(\varphi; 2, a_1, a_2), \dots,$$

so sieht man, daß darin zwar ebenfalls Ineinanderschachtelungen von B und C auftreten, aber um diese sukzessiv bilden zu können, haben wir immer mehr Variablen einzuführen. Z. B. ist

$$A(\varphi; 1, a_1, a_2) = C(\lambda x y[A(\lambda z[A(\varphi; 0, x, z)]; 0, a_1, y)]; 0, a_1, a_2) =$$

$$C(\lambda x y[B(\lambda z[B(\varphi; x, z)]; a_1, y)]; 0, a_1, a_2).$$

Hier hängt das innerste $B(\varphi; x, z)$ von 2 freien Variablen (x und z) ab, aber

$$B(\lambda z[B(\varphi; x, z)]; a_1, y)$$

bereits von 3 freien Variablen: x, a_1 und y . Im Aufbau von $A(\varphi; 2, a_1, a_2)$ wird auch eine 4-stellige Funktionsfunktion angewandt, usw. Daher kann man hier mit endlicher Variablenanzahl keine Funktionsfunktion D angeben, welche sämtliche Bausteine im Aufbau der Werte von A annehmen würde.

Wenn man die betrachtete Methode zur Auflösung der Einschachtelungen einer mehrfachen Rekursion anwenden will, so versagt sie bereits auf der I-ten Stufe.

3. Wurde aber die Funktionsfunktion $B(q; m, n, a)$ (oder $A(q; n, a)$ in Nr. 1 dieses Kapitels) zur Definition einer zahlentheoretischen Funktion α verwendet, so könnte man doch glauben, daß sich die Definition von α durch die in Nr. 3 vom § 2 eingeführte Methode auf eine mehrfache Rekursion der I-ten Stufe zurückführen läßt.

Sei z. B. (um gleich eine mehrfache Rekursion zu untersuchen) die vollständige Definition von α :

$$\alpha(0, a) = a$$

$$\alpha(m+1, a) = B(\lambda x[\alpha(m, x)]; m, a, a),$$

mit

$$B(q; m, n, a) = q(a), \text{ falls } m \cdot n = 0$$

$$B(q; m+1, n+1, a) = J(\lambda x[B(\lambda y[B(q; m, y, a)]; m+1, n, x)]; n, a)$$

und

$$J(q; 0, a) = q(a)$$

$$J(q; n+1, a) = q(J(q; n, a)).$$

Nach der genannten Methode hätte man hier

$$\alpha(m_0+1, a_0) = B(\lambda x[\alpha(m_0, x)]; m_1, a_0, a_0) = \beta(m_0, m_1, a_0, a_0)$$

zu setzen, wobei

$$\beta(m_0, m_1, n, a_0) = B(\lambda x[\alpha(m_0, x)]; m_1, n, a_0)$$

ist, also

$$\beta(m_0, m_1, n, a_0) = \alpha(m_0, a_0), \text{ falls } m_1 \cdot n = 0$$

$$\beta(m_0, m_1+1, n+1, a_0) = B(\lambda x[\alpha(m_0, x)]; m_1+1, n+1, a_0) =$$

$$= J(\lambda x[B(\lambda y[B(\lambda z[\alpha(m_0, z)]; m_1, y, a_0)]; m_1+1, n, x)]; n, a_0)$$

$$= J(\lambda x[B(\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]; m_1+1, n, x)]; n, a_0).$$

Hier wird für q in $B(q; m, n, a)$ nicht $\lambda x[\alpha(m_0, x)]$, sondern $\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]$ gesetzt, so hat man außer β auch

$$\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, a_1) = B(\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]; m_2, n, a_1)$$

einzuführen; damit ergibt sich

$$\beta(m_0, m_1+1, n+1, a_0) = J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_1+1, n, a_0, x)]; n, a_0) =$$

$$= \iota(m_0, m_1, m_1+1, n, n, a_0),$$

falls

$$J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, x)]; r, a_0) = \iota(m_0, m_1, m_2, n, r, a_0)$$

gesetzt wird. (Dabei hat sich das zweite Argument vermindert.) So läßt sich ι mit Hilfe von β durch folgende Rekursion nach r definieren:

$$\begin{aligned}
 \iota(m_0, m_1, m_2, n, 0, a_0) &= J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a, x)]; 0, a_0) = \\
 &\quad \beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, a_0) \\
 \iota(m_0, m_1, m_2, n, r+1, a_0) &= J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a, x)]; r+1, a_0) = \\
 &\quad \beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, J(\lambda x[\beta'(m_0, m_1, m_2, n, a, x)]; r, a_0)) = \\
 &= \beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, \iota(m_0, m_1, m_2, n, r, a_0)).
 \end{aligned}$$

Aber in der rekursiven Definition von β' muß für q in $B(q; m, n, a)$ wieder eine andere Funktion eingesetzt werden als bisher; dies erfordert die Einführung neuer Funktionen β'' und ι' :

$$\begin{aligned}
 \beta'(m_0, m_1, m_2, n, a_0, a_1) &= B(\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]; m_2, n, a_1) = \\
 &= \beta(m_0, m_1, a_1, a_0), \text{ falls } m_2 \cdot n = 0, \\
 \beta'(m_0, m_1, m_2 + 1, n + 1, a_0, a_1) &= B(\lambda y[\beta(m_0, m_1, y, a_0)]; m_2 + 1, n + 1, a_1) = \\
 &= J(\lambda x[B(\lambda y[\beta(\lambda z[\beta(m_0, m_1, z, a_0)]; m_2, y, a_1)]; m_2 + 1, n, x)]; n, a_1) = \\
 &= J(\lambda x[B(\lambda y[\beta'(m_0, m_1, m_2, y, a_0, a_1)]; m_2 + 1, n, x)]; n, a_1) = \\
 &= J(\lambda x[\beta''(m_0, m_1, m_2, m_2 + 1, n, a_0, a_1, x)]; n, a_1) = \\
 &= \iota'(m_0, m_1, m_2, m_2 + 1, n, n, a_0, a_1),
 \end{aligned}$$

(dabei hat sich das dritte Argument vermindert); wo

$$\beta''(m_0, m_1, m_2, m_3, n, a_0, a_1, a_2) = B(\lambda y[\beta'(m_0, m_1, m_2, y, a_0, a_1)]; m_3, n, a_2)$$

und

$$\iota'(m_0, m_1, m_2, m_3, n, r, a_0, a_1) = J(\lambda x[\beta''(m_0, m_1, m_2, m_3, n, a_0, a_1, x)]; r, a_1)$$

ist.

Hier kann ι' wieder mit Hilfe von β'' durch eine Rekursion nach r definiert werden; die rekursive Definition von β'' erfordert aber die Einführung neuer Funktionen β''' und ι'' ; und so fort. So müssen unendlich viele, immer mehr-stellige Funktionen eingeführt werden, wobei immer neue Argumente als Rekursionsvariablen auftreten. Man gelangt zu einer eleganteren Bezeichnung, falls man β_1 statt β , β_2 statt β' , β_3 statt β'' usw. schreibt, und die Funktion α selbst auch durch β_0 bezeichnet; so ist β_s eine Funktion von $2s + 2$ Argumenten, von denen die ersten $s + 1$ durch m_0, \dots, m_s , die $s + 2$ -te durch n , die letzten s (für $s \geq 1$) durch a_0, \dots, a_{s-1} bezeichnet werden. Aus dem gleichen Grunde soll

$$\iota_s(m_0, \dots, m_{s+2}, n, r, a_0, \dots, a_s) = J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+2}, n, a_0, \dots, a_s, x)]; r, a_s)$$

gesetzt werden, so daß ι_0 die bisher durch ι , ι_1 die bisher durch ι' bezeichnete Funktion bedeutet, usw. Wird also auch der „Index“ s als eine Variable betrachtet, so gelangt man zu einer Art Funktion, bei welcher es von einem Argument abhängt, wievieltellig die Funktion ist.

Die Definition von β_s lautet also:

$$\beta_0(m_0, n) = \alpha(m_0, n)$$

$$\beta_{s+1}(m_0, \dots, m_{s+1}, n, a_0, \dots, a_s) = B(\lambda y[\beta_s(m_0, \dots, m_s, y, a_0, \dots, a_{s-1})]; m_{s+1}, n, a_s);$$

daher ist

$$\begin{aligned}\alpha(m_0 + 1, a_0) &= B(\lambda y[\alpha(m_0, y)]; m_0, a_0, a_0) = B(\lambda y[\beta_0(m_0, y)]; m_0, a_0, a_0) \\ &= \beta_1(m_0, m_0, a_0, a_0).\end{aligned}$$

Aus den rekursiven Definitionen der Funktionsfunktionen B und J gewinnt man eine Art rekursive Definition für die Funktionen β_s und ι_s wie folgt:

$$\begin{aligned}\beta_0(m_0, n) &= \alpha(m_0, n) \\ \beta_{s+1}(m_0, \dots, m_{s+1}, n, a_0, \dots, a_s) &= B(\lambda y[\beta_s(m_0, \dots, m_s, y, a_0, \dots, a_{s-1})]; m_{s+1}, n, a_s) \\ &= \beta_s(m_0, \dots, m_s, a_s, a_0, \dots, a_{s-1}), \text{ falls } m_{s+1} \cdot n = 0 \\ \beta_{s+1}(m_0, \dots, m_s, m_{s+1} + 1, n + 1, a_0, \dots, a_s) &= \\ &= B(\lambda y[\beta_s(m_0, \dots, m_s, y, a_0, \dots, a_{s-1})]; m_{s+1} + 1, n + 1, a_s) = \\ &= J(\lambda x[B(\lambda y[B(\lambda z[\beta_s(m_0, \dots, m_s, z, a_0, \dots, a_{s-1})]; m_{s+1}, y, a_s)]; \\ &\quad ; m_{s+1} + 1, n, x)]; n, a_s) \\ &= J(\lambda x[B(\lambda y[\beta_{s+1}(m_0, \dots, m_{s+1}, y, a_0, \dots, a_s)]; m_{s+1} + 1, n, x)]; n, a_s) \\ &= J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+1}, m_{s+1} + 1, n, a_0, \dots, a_s, x)]; n, a_s) = \\ &= \iota_s(m_0, \dots, m_{s+1}, m_{s+1} + 1, n, n, a_0, \dots, a_s),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\iota_s(m_0, \dots, m_{s+2}, n, 0, a_0, \dots, a_s) &= J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+2}, n, a_0, \dots, a_s, x)]; 0, a_s) = \\ &= \beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+2}, n, a_0, \dots, a_s, a_s) \\ \iota_s(m_0, \dots, m_{s+2}, n, r + 1, a_0, \dots, a_s) &= J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+2}, n, a_0, \dots, a_s, x)]; \\ &\quad ; r + 1, a_s) = \\ &= \beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+2}, n, a_0, \dots, a_s, J(\lambda x[\beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+2}, n, a_0, \dots, a_s, x)]; r, a_s)) = \\ &= \beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+2}, n, a_0, \dots, a_s, \iota_s(m_0, \dots, m_{s+2}, n, r, a_0, \dots, a_s)).\end{aligned}$$

Somit erhält man die folgende simultane Definition für die Funktionen α , β_s und ι_s :

$$\begin{aligned}\alpha(0, a_0) &= a_0, \\ \alpha(m_0 + 1, a_0) &= \beta_1(m_0, m_0, a_0, a_0), \\ \beta_0(m_0, n) &= \alpha(m_0, n), \\ \beta_{s+1}(m_0, \dots, m_{s+1}, n, a_0, \dots, a_s) &= \beta_s(m_0, \dots, m_s, a_s, a_0, \dots, a_{s-1}), \text{ falls } m_{s+1} \cdot n = 0, \\ \beta_{s+1}(m_0, \dots, m_s, m_{s+1} + 1, n + 1, a_0, \dots, a_s) &= \iota_s(m_0, \dots, m_{s+1}, m_{s+1} + 1, n, n, a_0, \dots, a_s), \\ \iota_s(m_0, \dots, m_{s+2}, n, 0, a_0, \dots, a_s) &= \beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+2}, n, a_0, \dots, a_s, a_s), \\ \iota_s(m_0, \dots, m_{s+2}, n, r + 1, a_0, \dots, a_s) &= \\ &= \beta_{s+2}(m_0, \dots, m_{s+2}, n, a_0, \dots, a_s, \iota_s(m_0, \dots, m_{s+2}, n, r, a_0, \dots, a_s)).\end{aligned}$$

4. Fassen wir nun diese Definitionen zusammen. Sei

$$\begin{aligned}\delta(m_0, \dots, m_{s+2}, r, 0, s, n, a_0, \dots, a_s) &= \alpha(m_0, a_0), \\ \delta(m_0, \dots, m_{s+2}, r, 1, s, n, a_0, \dots, a_s) &= \beta_s(m_0, \dots, m_s, n, a_0, \dots, a_{s-1}), \\ \delta(m_0, \dots, m_{s+2}, r, i + 2, s, n, a_0, \dots, a_s) &= \iota_s(m_0, \dots, m_{s+2}, n, r, a_0, \dots, a_s).\end{aligned}$$

So lautet die Definition von δ (für Argumente, von welchen δ an der betrachteten Stelle nicht tatsächlich abhängt, kann freilich beliebiges gesetzt werden):

$$\begin{aligned}\delta(0, m_1, \dots, m_{s+2}, r, 0, s, n, a_0, \dots, a_s) &= a_0 \\ \delta(m_0 + 1, m_1, \dots, m_{s+2}, r, 0, s, n, a_0, \dots, a_s) &= \delta(m_0, m_0, m_2, m_3, r, 1, 1, a_0, a_0, a_0) \\ \delta(m_0, m_1, m_2, r, 1, 0, n, a_0) &= \delta(m_0, m_1, m_2, r, 0, 0, n, n) \\ \delta(m_0, \dots, m_{s+3}, r, 1, s+1, n, a_0, \dots, a_{s+1}) &= \delta(m_0, \dots, m_{s+2}, r, 1, s, a_s, a_0, \dots, a_{s-1}), \\ &\quad \text{falls } m_{s+1} \cdot n = 0 \\ \delta(m_0, \dots, m_s, m_{s+1} + 1, m_{s+2}, m_{s+3}, r, 1, s+1, n+1, a_0, \dots, a_{s+1}) &= \\ &\quad \delta(m_0, \dots, m_{s+1}, m_{s+1} + 1, n, 2, s, n, a_0, \dots, a_s) \\ \delta(m_0, \dots, m_{s+2}, 0, i+2, s, n, a_0, \dots, a_s) &= \\ &= \delta(m_0, \dots, m_{s+2}, 0, 0, 0, 1, s+2, n, a_0, \dots, a_s, a_s, a_s) \\ \delta(m_0, \dots, m_{s+2}, r+1, i+2, s, n, a_0, \dots, a_s) &= \\ &= \delta(m_0, \dots, m_{s+2}, 0, 0, r+1, 1, s+2, n, a_0, \dots, a_s); \\ &\quad ; \delta(m_0, \dots, m_{s+2}, r, i+2, s, n, a_0, \dots, a_s), a_s); \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich α durch die Substitution:

$$\alpha(m_0, a_0) = \delta(m_0, \dots, m_{s+2}, r, 0, s, n, a_0, \dots, a_s)$$

für beliebige $m_1, \dots, m_{s+2}, r, s, n, a_1, \dots, a_s$, etwa als

$$\alpha(m_0, a_0) = \delta(m_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a_0).$$

Die Funktion δ ist eigentlich unendlich-vielstellig: genauer, es hängt von ihrem Argument s ab, wievieltellig sie bei gegebenem s ist. Ihre Definition ist eine unendlich-vielfache Rekursion: die Rekursion verläuft zwar bei jedem s nach den 5 Variablen m_0, m_s, r, i, s (m_0 vertritt dabei die Rekursionsvariable von α , ebenso m_s eine Rekursionsvariable von B , und r die Rekursionsvariable von f), dabei bedeutet aber m_s für jedes s eine andere Variable.

5. Die Definition von δ kann auch als eine transfinite Rekursion vom Typus ω^ω formuliert werden. Das kann z. B. so geschehen, daß

$$\gamma(m) = \delta(\exp_0(m), \exp_1(m), \dots, \exp_{2s+7}(m))$$

gesetzt wird, so daß

$$\delta(m_0, \dots, m_{s+2}, r, i, s, n, a_0, \dots, a_s) = \gamma\left(\left\{\prod_{j=0}^{s+2} p_j^{m_j}\right\} \left\{p_{s+3}^r p_{s+4}^i p_{s+5}^s p_{s+6}^n\right\} \prod_{j=s+7}^{2s+7} p_j^{a_j}\right)$$

gilt. So ergibt sich speziell

$$\alpha(m, a) = \delta(m, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a) = \gamma(2^m \cdot 19^a).$$

Aus der Definition von δ erhält man für γ eine solche Rekursion, wobei eine Stelle m dann als Vorgänger einer Stelle n betrachtet wird, wenn die erste unter den Primzahlen

$$p_0, p_1, p_2, \dots$$

welche in den Primfaktorenzerlegungen von m und n mit verschiedenem Exponenten teilnimmt, in der Zerlegung von m einen kleineren Exponenten besitzt, als in der Zerlegung von n . Eine solche Anordnung der Zahlen ist aber vom Typus ω^ω .

§ 5. Offene Probleme

1. Nach Nr. 5 vom § 4 scheint die II-te Stufe geeignet zu sein, zahlen-theoretische Funktionen, die durch Substitution aus solchen Funktionen entstehen, welche durch transfinite Rekursionen vom Typus ω^ω angegeben wurden, ohne transfinite Rekursionen zu definieren.

Die „Diagonalfunktion“ der mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe (welche von sämtlichen mehrfach-rekursiven Funktionen der I-ten Stufe verschieden ist), ist aber auch eine Funktion dieser Art.¹¹ Könnte man die Diagonalfunktion auf der II-ten Stufe definieren, so hätte man einen Beweis dafür, daß die II-te Stufe eine weitere Funktionenklasse liefert, als die I-te.

Betrachtet man aber die Definition der Diagonalfunktion näher, so sieht man, daß diese unendlich-vielfache Rekursion „vollzählig-mehrfach“ ist, in dem Sinne, daß die Rekursion an jeder Stelle, wo keine der Rekursionsvariablen 0 ist, nach sämtlichen auftretenden Rekursionsvariablen verläuft. Die Definition von unserem δ kann dafür „zerstreut-mehrfach“ genannt werden, da diese Rekursion bei jedem s bloß nach 5 der $s + 6$ Rekursionsvariablen verläuft (aber bei verschiedenen s nach anderen). Die Definition anderer Funktionen der II-ten Stufe kann auch immer auf eine solche Rekursion ohne Funktionsvariable zurückgeführt werden, welche an jeder Stelle nach Variablen einer ganz bestimmten Anzahl verläuft: diese Anzahl hängt von der Struktur der ursprünglichen Definition (der II-ten Stufe) ab.

Wenn es gelingen würde, die Diagonalfunktion der I-ten Stufe auf der II-ten Stufe zu definieren, so hätte man ein Beispiel für eine vollzählig-mehrfache Rekursion, welche sich auf zerstreut-mehrfache Rekursion und Substitution zurückführen läßt. Es ist sehr fraglich, ob dies bei einer so wesentlich vollzählig-mehrfachen Rekursion möglich ist, wie die Definition jener Diagonalfunktion.

Es wäre freilich auch möglich, daß unser δ und ebenso beliebige Funktionen der II-ten Stufe — wenn die bisherigen Methoden auch versagen — auf irgendeine Art doch durch mehrfache Rekursionen der I-ten Stufe (oder, was auf dasselbe herauskommt, durch transfinite Rekursionen vom Typus ω^k , wobei k endlich ist) und Substitutionen definiert werden könnten; daß sich also die zerstreut-vielfachen Rekursionen noch auf endlich-vielfache Rekursionen auflösen ließen. Dann würde die II-te Stufe nichts Neues gegenüber der I-ten Stufe liefern. Dies scheint aber auch nicht wahrscheinlich zu sein.

¹¹ Siehe Fußnote ⁵.

Auch an sich ist das Problem interessant: gibt es gewisse Zwischendinge zwischen den transfiniten Rekursionen vom Typus ω^k mit endlichem k und der vollzähligen transfiniten Rekursion vom Typus ω^ω — nämlich die zerstreute (d. h. auf zerstreut-mehrfache, an jeder Stelle nach 1, oder nach 2, oder nach 3, ... Variablen verlaufende Rekursionen übersetzbare) transfiniten Rekursionen vom Typus ω^ω ; oder lassen sich die zerstreut-transfiniten Rekursionen vom Typus ω^ω auf jene vom Typus ω^k auflösen; oder läßt sich etwa die vollzählig-transfiniten Rekursion vom Typus ω^ω auf zerstreute auflösen?

Dieses Problem lautet gewissermaßen ähnlich, als jenes: ob es Zwischen-Mächtigkeiten zwischen dem Abzählbaren und dem Kontinuum gibt; aber im Gegensatz zur Kontinuums-hypothese scheint es wahrscheinlich, daß es hier tatsächlich uneinschmelzbare Zwischendinge gibt.

2. Dieselbe Methode, wodurch aus einer Definition der II-ten Stufe die Funktionsvariablen ausgeschaltet wurden (und welche bei gewissen Einschachtelungen zu zerstreut-transfiniten Rekursionen geführt hat), kann auch auf die Definitionen zahlentheoretischer Funktionen der III-ten Stufe, zur Ausschaltung der Funktionsfunktionsvariablen angewandt werden. So erhält man bei gewissen Einschachtelungen zerstreut-transfiniten Rekursionen der II-ten Stufe. Wird auf eine solche Rekursion dieselbe Methode, nun zur Ausschaltung der Funktionsvariablen, noch einmal angewandt, so führt sie zu einer zerstreut-transfiniten Rekursion von höherem Typus. Vollzählig-transfiniten Rekursionen sind auch von höheren (endlichen) Stufen nicht zu erwarten. Es ist sehr fraglich, ob sich die Diagonalfunktion der I-ten Stufe auf irgendeiner Stufe von endlicher Höhe definieren läßt.

Jedenfalls erhebt sich die Frage, ob sich eine vollzählig-transfiniten Rekursion auf zerstreut-transfiniten Rekursion von höherem Typus und Substitution zurückführen läßt?

Es wäre auch interessant zu untersuchen, welche Typen der transfiniten Rekursionen (oder eventuell andere Arten der allgemeinen Rekursion) für die verschiedenen Stufen charakteristisch sind.

3. Gelingt es auch nicht, die Diagonalfunktion der I-ten Stufe auf der II-ten Stufe zu definieren, so bietet sich noch ein Weg zu zeigen, daß die II-te Stufe mehr zahlentheoretische Funktionen umfaßt als die I-te: die Ackermannsche Majorisierungsmethode.¹²

Der Grundgedanke dieser Methode ist, daß ACKERMANN die „Bausteine“ einer zweistelligen eingeschachtelten einfachen Rekursion der I-ten Stufe durch monoton nicht-abnehmende Majoranten ersetzt; diese nehmen nicht ab, wenn ein jedes ihrer Argumente durch das größte ersetzt wird, und so kommt er zu einer Majoranten der durch die betrachtete Rekursion definierten Funktion, welche (statt der verschiedenen neuen Bausteine die größte von ihnen genom-

¹² Siehe Fußnote 2.

men) etwa so definiert werden könnte:

$$\alpha(0, a) = \beta(a) \\ \alpha(n+1, a) = \beta(\alpha(n, \beta(n, \dots, \beta(\alpha(n, \beta(a))) \dots))).$$

Wird hier die Rekursion aufgelöst, so sieht man, daß

$$\alpha(0, a) = \beta(a), \\ \alpha(1, a) = \beta(\beta(\dots \beta(\beta(a)) \dots)), \\ \dots \dots \dots$$

ist; hier handelt es sich also einfach um Iterationen von $\beta(a)$, wobei es von n abhängt, wievielmale Iteration den Wert von $\alpha(n, a)$ ergibt. Daraus folgt leicht, daß wenn man, aus einer Majoranten der im Aufbau der einfach-rekursiven Funktionen zu Grunde genommenen Funktionen ausgehend, durch Iterationen immer neue Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ bildet, dadurch eine solche Funktion φ_n erhält, welche für ein geeignet gewähltes n eine beliebige einfach-rekursive Funktion der I-ten Stufe majorisiert.

Den Gedankengang auf eine k -fache Rekursion (von „Normalform“) angewandt, würde man als Majorante der dadurch definierten k -stelligen Funktion zunächst eine Funktion erhalten, welche durch eine Rekursion etwa folgender Form definiert wird:

$$\alpha(n_1, \dots, n_k) = \max(n_1, \dots, n_k), \text{ falls } n_1 \dots n_k = 0 \\ \alpha(n_1+1, \dots, n_k+1) = \beta(\alpha_0(n_1, \beta(\alpha_1(\beta(\alpha_2(\dots \beta(\alpha_{k-1} \dots))))), \dots \\ \dots, \beta(\alpha_i(\beta(\alpha_2(\dots \beta(\alpha_{k-1} \dots)))))),$$

wobei für $i=1, 2, \dots, k-1$

$$\alpha_i(a) = \alpha(n_1+1, \dots, n_i+1, n_{i+1}, a, \dots, a),$$

und so speziell für $i=k-1$

$$\alpha_{k-1} = \alpha(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1, n_k)$$

ist. Ganz innen kommt hier überall eben $\alpha_{k-1} = \alpha(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1, n_k)$ vor; und ist $n_k \neq 0$, so kann das durch einen genau so aufgebauten Ausdruck als die rechte Seite der zweiten Definitionsgleichung ersetzt werden, mit dem einzigen Unterschied, daß statt $\alpha(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1, n_k)$ darin $\alpha(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1, n_k-1)$ steht. Ist hier $n_k-1 \neq 0$, so kann $\alpha(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1, n_k-1)$ wieder durch einen ähnlichen Ausdruck ersetzt werden, usw., bis man nach n_k+1 Schritten zu einem Ausdruck kommt, wo innen

$$\alpha(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1, 0) = \max(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1)$$

steht. So entsteht $\alpha(n_1+1, \dots, n_k+1)$ durch n_k+1 -malige Iteration an der Stelle $\max(n_1+1, \dots, n_{k-1}+1)$ aus

$$\beta(\alpha_0(n_1, \beta(\alpha_1 \dots \beta(\alpha_{k-2}(\beta(x))) \dots), \dots, \beta(\alpha_1 \dots, \beta(\alpha_k(\beta(x))) \dots))),$$

und daher kann α auf der II-ten Stufe mit Hilfe der durch

$$I(\varphi, 0, a) = a$$

$$I(\varphi; n+1, a) = \varphi(I(\varphi; n, a))$$

definierten Iterations-Funktionsfunktion durch die $k-1$ -fache Rekursion

$$\begin{aligned} \alpha(n_1, \dots, n_k) &= \max(n_1, \dots, n_k), \text{ falls } n_1 \cdot n_2 \dots n_k = 0 \\ &\alpha(n_1 + 1, \dots, n_k + 1) = \\ &= I(\lambda x [\beta(\alpha_0(n_1, \beta(\alpha_1 \dots \beta(\alpha_{k-2}(\beta(x))) \dots)), \dots, \beta(\alpha_1 \dots \beta(\alpha_{k-2}(\beta(x))) \dots))]); \\ &\quad ; n_k + 1, \max(n_1 + 1, \dots, n_{k-1} + 1)) \end{aligned}$$

definiert werden, wobei für $i = 1, 2, \dots, k-2$

$$\alpha_i(a) = \alpha(n_1 + 1, \dots, n_i + 1, n_{i+1}, a, \dots, a)$$

ist (n_k ist hier keine Rekursionsvariable mehr, bloß ein Parameter).

Würde nun zuerst eine Majorante $\alpha_0(a)$ der Grundfunktionen für $\beta(a)$ gesetzt, dann mit der dadurch definierten Funktion $\alpha(n_1, \dots, n_k)$ die einstellige Funktion $\alpha'_i(a) = \alpha_i(a, \dots, a)$, usw., so könnte man Funktionen $\alpha'_0(a), \alpha'_1(a), \alpha'_2(a), \dots$ erhalten, unter welchen Majoranten einer beliebigen k -rekursiven Funktion $\gamma(n_1, \dots, n_k)$ der I-ten Stufe vorkommen würden (in dem Sinne, daß für ein geeignetes m , falls $\max(n_1, \dots, n_k)$ genügend groß ist, $\gamma(n_1, \dots, n_k) < \alpha_m(\max(n_1, \dots, n_k))$ gilt).

$$\alpha_m(n_1, \dots, n_k) = \alpha(m, n_1, \dots, n_k)$$

gesetzt, ergäbe sich für diese Majorantenfunktion der k -rekursiven Funktionen der I-ten Stufe eine k -fache Rekursion der II-ten Stufe. Diese Rekursion ließe sich auch auf k einfache Rekursionen auflösen; und als $k+1$ -te müßte noch die einfache Rekursion für I dazukommen. (Daß es aber eine 1-rekursive Funktion der II-ten Stufe gibt, welche auf der I-ten Stufe nicht k -rekursiv ist, erfordert nicht einen so langwierigen Beweis: es ist bekannt,¹³ daß es eine $k+1$ -rekursive Funktion der I-ten Stufe gibt, welche nicht k -rekursiv ist, und diese $k+1$ -rekursive Funktion läßt sich nach § 1 auf $k+1$ einfache Rekursionen der II-ten Stufe auflösen.) Im Aufbau einer Funktion der II-ten Stufe können jedoch nur Rekursionen von einer endlichen Anzahl teilnehmen. Auf diesem Wege kann man daher keine Funktion der II-ten Stufe erhalten, welche die k -rekursiven Funktionen der I-ten Stufe für alle k insgesamt majorisieren würde.

(Eingegangen am 9. Oktober 1951.)

¹³ Siehe Fußnote 9.

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ГИЛЬБЕРТА РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ
ВЫСШИХ КЛАССОВ

Р. ПЭТЭР (Будапешт)

(Резюме)

Арифметические функции, которые могут быть построены из некоторых основных функций путём конечного числа замещений и рекурсий, называются рекурсивными функциями. Различно определив понятие рекурсии получим разные классы функций (которые часто играли роль в исследованиях оснований математики). Исследованию связи различных классов рекурсивных функций дал толчок тот метод, которым Гильберт¹ хотел решить проблему континуума. Речь идёт о гипотезе, согласно которой между счётным множеством и множеством континуума не существует промежуточным множеств. Так как множество арифметических функций есть множество мощности континуума, Гильберт хотел доказать гипотезу тем, что к более высоким трансфинитным числам определяет рекурсии „более высокие“ и показывает, что предположение, согласно которому арифметические функции, определённые всё более высокими рекурсиями, исчерывают множество всех арифметических множеств, не ведёт к абсурду. В этих исследованиях было определено понятие рекурсивных функций высших классов: о функциях класса I, II, III и т. д. говорим соответственно тому, что в построении принимают участие лишь функции зависящие от численного переменного, или принимают участие и функции, зависящие от функциональных переменных, функцию функциональных переменных и т. д.

Для того, чтобы выполнить программу Гильберта, нужно прежде всего доказать, что высшие классы дают и новые функции: например, доказать, что существует рекурсивная функция класса II, которая не может быть определена, в классе I. Аккерман² доказал это, если ограничиться случаем однократных рекурсий (когда рекурсия производится по одному переменному). Но двукратной рекурсией и в классе I может быть определена рекурсия Аккермана. Если разрешим многократные рекурсии, по настоящий день не разрешён вопрос: является-ли класс II обширнее класса I. Кажется, что для разрешения этой проблемы метод маёризации Аккермана не годится.

На международном математическом конгрессе в Осло в 1936-ом году автор утверждала, что многократно рекурсивные функции класса I тождественны однократным рекурсиям класса II. Это утверждение основывалось на том предположении, что как и в классе I,³ в классе II, можно однократные „вкрапленные“ рекурсии свести к „примитивным“ рекурсиям (в которых переменные не участвующие в рекурсии остаются неизменными); доказательство было очень сложно и относящиеся к нему записи пропали во время войны.

Сейчас автор впервые публикует общее доказательство того, что многократно рекурсивные функции класса I могут быть определены в классе II однократными рекурсиями; и даёт очень простой новый метод сведения примитивных однократных рекурсий класса II к многократным рекурсиям класса I. Этот метод может употребляться и в таких случаях вкрапления (и для многократных рекурсий), которые строятся по методу строения вкрапленных рекурсий класса I, где вкрапленные значения встречаются лишь на местах численных переменных.

Но для класса II характерна возможность вкрапления нового типа: когда вкрапленные значения фигурируют на месте функциональных переменных. Если мы хотим привести такую рекурсию к примитивной старым или новым методом, нужно использовать такую функцию, от одного аргумента которой зависит сколькими переменными обладает функция при данном аргументе.

Новая функция δ встречающаяся при применении нового метода, может быть дана при помощи бесконечно-кратной рекурсии или трансфинитной рекурсии типа ω^ω . Известно, что определение „диагональной функции“ ψ , выводящей из класса I, такое же. Но определение ψ „полное“, в то время как определению δ может быть дано название „распылённой“ бесконечно-кратной или, соответственно, трансфинитной рекурсии, так как после того, как мы дадим какой-то аргумент, ψ оказывается функцией r переменных, то в определении $\psi(n_1 + 1, \dots, n_r + 1)$ принимает участие и такое значение ψ , которое она принимает при первом аргументе n_1 , и такое, которое она принимает при $n_1 + 1, n_2$ первых двух аргументах и т. д. без пробела, до $\psi(n_1 + 1, \dots, n_{r-1} + 1, n_r)$, в то время как в определении δ рекурсия на каждом месте происходит при помощи определённого числа переменных, но в разных местах по разным переменным. Таким образом очень сомнительно, можно ли определить в классе II функцию ψ , выходящую из класса I.

В связи с этим возникают и сами по себе интересные проблемы. Есть ли промежуточные степени между рекурсиями ω^k при конечном k (k — кратными класса I) и полными трансфинитными типа ω^ω , которые не могут быть влиты ни в одну из них? (Здесь можно чувствовать некоторое сходство с поднятием вопроса проблемы континуума. но в противоположность проблем континуума, здесь кажется вероятным существование промежуточных степеней).

Нельзя ли полную рекурсию типа ω^ω , свести к распылённой рекурсии высшего типа? (И в связи с этим определить диагональную функцию ψ если не в классе II, то в какомнибудь высшем классе?) Было бы интересно исследовать и то, трансфинитные рекурсии какого типа характерны для высших классов.

OCCURRENCE AND COINCIDENCE PHENOMENA IN CASE OF HAPPENINGS WITH ARBITRARY DISTRIBUTION LAW OF DURATION

By
LAJOS TAKÁCS (Budapest)
(Presented by A. RÉNYI)

I. OCCURRENCE PHENOMENA

§ 1. Formulation of the problem

Let us consider a stochastic process of the Poisson type. Let the density of events be denoted by p . In this case the probability of *one (or at least one) event taking place* between the moments u and $u + \Delta u$ is equal to $p\Delta u + o(\Delta u)$, whilst the probability of more than one event taking place in the same time interval is¹ $o(\Delta u)$, and thus the mean value of the number of occurrences is $p\Delta u$ [3]. In what follows, for the sake of brevity, we shall say that the probability of one event occurring between the moments u and $u + du$ is pdu .

Let us examine the Poisson process in the time interval $0 \leq u < \infty$ and let us define a new process as follows: let us suppose that the events occurring in the time interval $0 \leq u < \infty$ give rise at the same moment to a *happening*, in case the event takes place at a moment when no happening is going on. An event occurring during the course of a happening does not give rise to any new happening. Let the duration of a happening be a random variable: ξ .

While the process of events is a Markoff process (Poisson process), the process of happenings is no longer a Markoff process, as the future behaviour of the process does not depend on the present condition only, but also on how the process has reached the present condition.

¹ $o(\Delta u)$ denotes a function for which $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} = 0$, whereas $O(\Delta u)$ is a function,

for which $\left| \frac{O(\Delta u)}{\Delta u} \right|$ is bounded.

For the sake of definiteness, let us think of the particles counted by means of a Geiger-Müller counter. The particles to be counted are producing ions in the gas space and these ions are causing a pulse-like discharge. The progress of the discharge once started is not influenced by any further particles arriving. Accordingly, for new particles possibly arriving during the discharge the counter is insensitive. According to our terminology, we shall say that at a given moment *an event occurs* if at that moment a particle arrives. In many cases, e. g. in the disintegration of radio-active atoms, the arrival of particles forms a Poisson process. It is the duration of the discharges that we are calling *happenings*.

The idea of the stochastic process of happenings has been introduced in the paper [6] of A. RÉNYI. The difference between the discussions there and in the present paper lies in the fact that in the case investigated by A. RÉNYI it is possible for new happenings to begin during a happening going on, whereas in our case this is excluded.

We are going to investigate the following problem: we suppose that happenings are started only by events occurring after the moment $u=0$, i. e. we consider the process of happenings to begin at the moment $u=0$ and we suppose that the duration ξ of each happening possesses the same probability distribution $H(x)$. ($H(x)$ means the probability that the duration ξ of a happening is $\leq x$.) Let $W(t, n)$ denote the probability of the number of happenings beginning in the time interval $(0, t)$ being $\leq n$ and let $m(t)$ design the mean value of the number of happenings beginning in the interval $(0, t)$ which value, if it is finite, can be expressed as follows:

$$(1) \quad m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t, n)].$$

Let further $\Omega(t, z)$ denote the distribution function of the duration of the happenings taking place in the time interval $(0, t)$, i. e. the probability of the event that the duration in question is $\leq z$, and let $\tau(t)$ denote the mean value of the duration of the happenings taking place in the time interval $(0, t)$ which can be expressed as follows:

$$(2) \quad \tau(t) = \int_0^t [1 - \Omega(t, z)] dz.$$

It is these quantities we shall determine in what follows.

For the purpose of calculating the values $m(t)$ and $\tau(t)$ we introduce two new functions. Let the probability of a happening going on at the moment u be $F(u)$. In this case the probability of a happening starting between the moments u and $u + \Delta u$ is

$$[1 - F(u)][p\Delta u + o(\Delta u)],$$

since the probability of a happening starting in the time interval $(u, u + \Delta u)$

is equal to the product of the probabilities of the following two independent events: 1) no happening is going on at the moment u whose probability is $1-F(u)$ and 2) an event occurs in the time interval $(u, u+\Delta u)$ whose probability is $p\Delta u + o(\Delta u)$. In what follows, the probability of a happening starting in the time interval between the moments u and $u+\Delta u$ will be denoted as follows:

$$f(u)\Delta u + o(\Delta u).$$

Here

$$(3) \quad f(u) = [1-F(u)]p.$$

The probability of more than one happening starting in the time interval $(u, u+\Delta u)$ is, as easy to understand, $o(\Delta u)$. This will be expressed in what follows by saying shortly that the probability of a happening beginning between the moments u and $u+du$ is $f(u)du$.

§ 2. The determination of $f(u)$ and $F(u)$

Let us suppose that the mean value of ξ ,

$$(4) \quad \alpha = \int_0^{\infty} [1-H(x)]dx$$

exists and is finite.

First of all, we may write

$$(5) \quad F(u) = \int_0^u f(u-x)[1-H(x)]dx.$$

The reason for this may be given simply in the following way:

At the moment u a happening is going on if a happening has begun between the moments $u-x-dx$ and $u-x$, the probability whereof is $f(u-x)dx$, and if the duration of this happening is greater than x , the probability thereof is $1-H(x)$. The probability of the occurrence of these two independent events is the product of the two, and $F(u)$ is obtained by integration for all possible values of x .

By substituting (5) into (3), we obtain a Volterra integral equation of the second kind

$$(6) \quad f(u) = p - p \int_0^u f(u-x)[1-H(x)]dx$$

by which $f(u)$ is defined. Knowing $f(u)$, it is possible, by aid of (3), to obtain $F(u)$. The following theorem holds:

THEOREM 1. *If the value of the integral*

$$\int_0^{\infty} [1-H(x)]dx$$

is a finite number α , then there exists one and only one non-negative, bounded and continuous solution $f(u)$ of the integral equation (6).

In accordance with a well known theorem of the theory of Volterra integral equations of the second kind, if $1-H(x)$ is measurable and bounded in any finite interval, then there exists one and only one bounded measurable solution $f(u)$ of (6). (See [7].) In our case the distribution function $H(x)$ is non-decreasing and $0 \leq H(x) \leq 1$, and, accordingly, satisfies the requirements, and thus there exists a bounded, measurable solution $f(u)$. It is easy to prove, but is also evident from (3), that

$$0 \leq f(u) \leq p.$$

There remains to be proved the continuity of $f(u)$. Our integral equation may also be written in the following form:

$$(7) \quad f(u) = p - p \int_0^u f(x)[1-H(u-x)]dx.$$

Hence

$$(8) \quad \begin{aligned} f(u+\Delta u) - f(u) &= p \int_0^u f(x)[H(u+\Delta u-x) - H(u-x)]dx - \\ &\quad - p \int_u^{u+\Delta u} f(x)[1-H(u+\Delta u-x)]dx. \end{aligned}$$

$H(x)$ being a non-decreasing function, $H(u+\Delta u-x) - H(u-x) \geq 0$ and further $1-H(u+\Delta u-x) \geq 0$ and $0 \leq f(u) \leq p$ and, consequently

$$|f(u+\Delta u) - f(u)| \leq p^2 \left[\int_0^u H(x)dx - \int_0^{\Delta u} H(x)dx \right] + p^2 \Delta u \leq 2p^2 \Delta u,$$

i. e., $f(u)$ is continuous.

The explicit determination of $f(u)$ can often be performed easily by means of Laplace transformation. Let

$$(9) \quad \psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x),$$

the integral being convergent for $\Re(s) \geq 0$, and

$$(10) \quad \varphi(s) = \int_0^\infty e^{-su} [1-H(x)]dx = \frac{1-\psi(s)}{s}$$

which is likewise convergent for $\Re(s) \geq 0$.

With the above function

$$(11) \quad \varphi(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)du$$

is convergent for $\Re(s) > 0$ and the following equation is valid:

$$(12) \quad \varphi(s) = \frac{p}{s[1 + p\psi(s)]} = \frac{p}{s + p - p\psi(s)}$$

which permits the determination of $f(u)$ in its points of continuity, that is to say, for all values of u .

$f(u)$ is bounded and continuous for all values of u , and, accordingly, $\varphi(s)$ exists for $\Re(s) > 0$ and from equation (6) we immediately obtain that

$$\varphi(s) + p\varphi(s)\psi(s) = \frac{p}{s}$$

from which (12) can be obtained. It is known from the theory of Laplace transforms that from $\varphi(s)$ it is possible to determine the value of $f(u)$ in all its points of continuity.

With the aid of $f(u)$ and $F(u)$ the mean values can be determined in a simple manner.

§ 3. Determination of the mean values

The average number of happenings beginning in the time interval $(0, t)$ is

$$(13) \quad m(t) = \int_0^t f(u) du$$

whilst the average total length of duration in the time interval $(0, t)$ of the happenings beginning in the same interval is

$$(14) \quad \tau(t) = \int_0^t F(u) du.$$

PROOF. The probability of a happening beginning in the time interval $(u, u + \Delta u)$ is $f(u)\Delta u + o(\Delta u)$. The probability of more than one happening beginning is $o(\Delta u)$: It is easily seen that the sum for the average number of the happenings extended to more than one happening is $o(\Delta u)$ in consequence of the fact that in case of a Poisson process the sum for the average number of the events extended to more than one event is $o(\Delta u)$ and it is even true for the happenings. Accordingly, the average number of happenings beginning in the interval $(u, u + \Delta u)$ is $f(u)\Delta u + o(\Delta u)$. What interests us is the average number of happenings beginning in the interval $(0, t)$. Let us divide the interval $(0, t)$ by means of the dividing points $u_0 = 0, u_1, u_2, \dots, u_n = t$ into n subintervals, the length of each of which is $\Delta u = t/n$. The average number of events beginning in the i th subinterval is $f(u_i)\Delta u + o(\Delta u)$ and, according to the definition of the mean value,

$$m(t) = \sum_{i=1}^n [f(u_i)\Delta u + o(\Delta u)].$$

As $f(u)$ is bounded and continuous in the interval $(0, t)$, it follows that in case $n \rightarrow \infty$ the above Riemann sum converges to the integral

$$\int_0^t f(u) du,$$

that is to say, (13) is true.

The mean value of the duration of the happenings falling within the interval $(u, u + \Delta u)$ is determined as follows. We distinguish three kinds of happenings: 1) Happenings going on at the moment u which are not terminated in the interval $(u, u + \Delta u)$; the probability of such a happening is $F(u) + O(\Delta u)$ and its duration is Δu . 2) Happenings going on at the moment u , and terminated in the time interval $(u, u + \Delta u)$; the probability of such a happening is $O(\Delta u)$ and its duration is smaller than Δu . 3) Happenings beginning in the interval $(u, u + \Delta u)$ the average number of which is $o(\Delta u)$, whilst their duration is smaller than Δu .

This is due to the following reasons: first of all, the probability of a happening, going on at some moment u , not being terminated within the interval $(u, u + \Delta u)$, is equal to the probability of a happening going on at the moment $u + \Delta u$, whose starting point falls within the time interval $(0, u)$, that is, does not fall into the time interval $(u, u + \Delta u)$. As in case a happening is going on at time $u + \Delta u$ two mutually exclusive cases are possible: the starting point of the happening may either fall into the interval $(0, u)$ or into the interval $(u, u + \Delta u)$, the probability of this latter event being, as can easily be seen, $O(\Delta u)$, the probability sought for is $F(u + \Delta u) - O(\Delta u)$. Here, owing to the continuity of $F(u)$, $F(u + \Delta u) = F(u) + O(\Delta u)$. Accordingly, the probability sought for differs from $F(u)$ by $O(\Delta u)$.

Further, a happening taking place at the moment u (the probability of which is denoted by $F(u)$) is possible in two ways mutually excluding each other: either the happening does not terminate in the interval $(u, u + \Delta u)$, the probability whereof is, as we have seen, $F(u) - O(\Delta u)$, or it terminates, the probability whereof amounts, according to what has been said above, to $O(\Delta u)$.

Thus, the average duration of the happenings taking place in the time interval $(u, u + \Delta u)$ amounts to

$$F(u)\Delta u + o(\Delta u).$$

Let us divide the interval $(0, t)$ by means of the dividing points mentioned above into n parts, in which case we may, in accordance with the definition of the mean value, write

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^n [F(u_i)\Delta u + o(\Delta u)].$$

As $F(u)$ is bounded in the interval $(0, t)$ ($0 \leq F(u) \leq 1$) and continuous, it follows that in case $n \rightarrow \infty$ the right side converges to the integral

$$\int_0^t F(u) du$$

and thus (14) is true.

REMARK 1. With the aid of the expressions (13) and (14) of the mean values, it results directly from equation (3) that the following relation holds between $m(t)$ and $\tau(t)$:

$$(15) \quad m(t) + p\tau(t) = pt.$$

REMARK 2. If the Laplace transform $q(s)$ of $f(u)$ is known, it follows that the Laplace transform of the expression $m(t) = \int_0^t f(u) du$, well known from the theory of Laplace transforms, is $q(s)/s$ from which $m(t)$ can often be determined easily. Then by (15) the Laplace transform of $\tau(t)$ is $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{p} \frac{q(s)}{s}$.

Remembering that if the Laplace transform of $f(u)$ is

$$(16) \quad q(s) = \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{A_{1\nu}}{s-s_\nu} + \frac{A_{2\nu}}{(s-s_\nu)^2} + \dots + \frac{A_{m_\nu\nu}}{(s-s_\nu)^{m_\nu}} \right) e^{s_\nu u_0},$$

it follows that

$$(17) \quad f(u) = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^n \left(A_{1\nu} + A_{2\nu} \frac{(u-u_0)}{1!} + \dots + A_{m_\nu\nu} \frac{(u-u_0)^{m_\nu-1}}{(m_\nu-1)!} \right) e^{s_\nu(u-u_0)} & \text{if } u \geq u_0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

the results of the examples enumerated below will be obtained easily.

EXAMPLE 1. Suppose that $\xi = \alpha$ (constant). In this case $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ and

$$(18) \quad q(s) = \frac{p}{p+s-pe^{-s\alpha}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{j+1} e^{-s\alpha j}$$

whence

$$(19) \quad f(u) = p \sum_{j=0}^{\left[\frac{u}{\alpha} \right]} e^{-p(u-\alpha j)} \frac{p^j (u-\alpha j)^j}{j!}$$

and

$$(20) \quad m(t) = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor + 1 + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor} \sum_{k=0}^j \frac{p^k (t-\alpha j)^k}{k!} e^{-p(t-\alpha j)}.$$

EXAMPLE 2. Let the distribution function of ξ be $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$. In this case $\psi(s) = \frac{1}{1+\alpha s}$ and.

$$(21) \quad q(s) = \frac{p(1+\alpha s)}{(1+\alpha p)s + \alpha s^2} = \frac{p}{(1+\alpha p)s} + \frac{\alpha^2 p^2}{(1+\alpha p)(1+\alpha p + \alpha s)},$$

hence

$$(22) \quad f(u) = \frac{p}{1 + \alpha p} + \frac{\alpha p^2}{1 + \alpha p} e^{-\frac{1 + \alpha p}{\alpha} u}$$

and

$$(23) \quad m(t) = \frac{p}{1 + \alpha p} t + \frac{\alpha^2 p^2}{(1 + \alpha p)^2} \left(1 - e^{-\frac{1 + \alpha p}{\alpha} t}\right).$$

§ 4. The asymptotic behaviour of $f(u)$

THEOREM 2. *If the average duration of the happenings*

$$(24) \quad \alpha = \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx$$

is finite, then we have

$$(25) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \frac{p}{1 + \alpha p}.$$

PROOF. First we observe that evidently

$$(26) \quad [m(t) - 1] \alpha \leq \tau(t) \leq m(t) \alpha.$$

Hence in view of (15) we have

$$(27) \quad \frac{p}{1 + \alpha p} \leq \frac{m(t)}{t} \leq \frac{p}{1 + \alpha p} + \frac{\alpha p}{1 + \alpha p} \frac{1}{t},$$

that is,

$$(28) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(u) du = \frac{p}{1 + \alpha p}.$$

From (25) we obtain (28), but to prove the converse we have to show that $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$ exists. So there are only two possibilities: either $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$ exists and this gives (25) or the latter does not exist.

We perform the proof by means of the following theorem which can be found in the book of PALEY-WIENER [5] (p. 59, Theorem 17):

Let $f(u)$ be measurable and bounded in every finite interval $(0, u)$ and let $K(x)$ belong to $L(0, \infty)$, i. e.

$$(29) \quad \int_0^{\infty} |K(x)| dx < +\infty.$$

Let

$$(30) \quad f(u) + \int_0^u K(u-x) f(x) dx \rightarrow C \quad \text{as } u \rightarrow \infty.$$

Then if

$$(31) \quad \int_0^{\infty} K(x) e^{-s x} dx \neq -1, \quad \Re(s) \geq 0,$$

we shall have

$$(32) \quad f(u) \rightarrow \frac{C}{1 + \int_0^{\infty} K(x) dx} \quad \text{as } u \rightarrow \infty.$$

Conversely, let $K(x)$ belong to $L(0, \infty)$, let

$$(33) \quad \int_0^{\infty} K(x) dx \neq -1$$

and let (30) imply (32) for every $f(u)$ satisfying our conditions. Then (31) must be true.

Let now $f(u)$ be the solution of the integral equation (7). We have shown that $f(u)$ is bounded and continuous. Let

$$(34) \quad K(x) = p[1 - H(x)].$$

Taking (24) into account, it may be proved that this satisfies our requirements concerning $K(x)$. With this function, by virtue of (7), we have

$$(35) \quad f(u) + p \int_0^u f(x) [1 - H(u-x)] dx = p,$$

whence $C = p$.

Since

$$(36) \quad \int_0^{\infty} K(x) dx = p \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx = p\alpha$$

and $C = p$, therefore (25) exists if

$$(37) \quad \int_0^{\infty} K(x) e^{-sx} dx = p \int_0^{\infty} [1 - H(x)] e^{-sx} dx = p \frac{1 - \psi(s)}{s} \neq -1, \quad \Re(s) \geq 0.$$

But this is true since for $s = 0$ on the left side we have $\alpha p \neq -1$; and supposing that there exists an s with $s \neq 0$ and $\Re(s) \geq 0$, not satisfying (37), we have

$$\psi(s) = 1 + \frac{s}{p}.$$

For $\Re(s) \geq 0$ we have $|\psi(s)| \leq 1$ and for $s \neq 0$, $\Re(s) \geq 0$ $\left| 1 + \frac{s}{p} \right| > 1$. Therefore every s on the right half plane satisfies (37). Hence our theorem is proved.

REMARK 1. Theorem 2 for the case $\alpha p < 1$ was proved by A. RÉNYI in an elementary way. His method can be probably extended to the case $\alpha p \geq 1$, which would make possible to avoid the use of the deeper theorem of PALEY-WIENER.

REMARK 2. If $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$ exists, then denoting by $\varphi(s)$ the Laplace transform of $f(u)$, we have

$$(38) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varphi(s)$$

(see for example [4], p. 458, Theorem 3). If $f(u)$ is again the solution of the integral equation (7), then for the function $\varphi(s)$ furnished by (12) we obtain

$$(39) \quad \lim_{s \rightarrow 0} s\varphi(s) = \frac{p}{1 + p\psi(0)} = \frac{p}{1 + p\alpha}.$$

The converse of this theorem in general fails to hold. But theorem 1 on p. 488 of [1] gives the possibility for an asymptotic expansion of $f(u)$ by means of $\varphi(s)$. In our case this reduces to the limit of $f(u)$.

REMARK 3. If in (27) for $m(t)$ we substitute (13) then we have

$$(40) \quad 0 \leq \int_0^t \left[f(u) - \frac{p}{1 + \alpha p} \right] du \leq \frac{\alpha p}{1 + \alpha p}.$$

This estimation is stronger than that of (28).

§ 5. The determination of $W(t, n)$

$W(t, n)$ is a continuous function of t . As $0 \leq W(t, n) \leq 1$, its Laplace transform:

$$(41) \quad \omega_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} W(t, n) dt$$

is convergent for $\Re(s) > 0$, and if

$$(42) \quad \psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x)$$

which is convergent for $\Re(s) \geq 0$, it will be true that

$$(43) \quad \omega_n(s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{p^{n+1} (\psi(s))^n}{(p+s)^{n+1}} \right]$$

which equation permits the determination of $W(t, n)$ in all its point of continuity, i. e. for all values of t .

PROOF. First of all, we shall show that $W(t, n)$ is continuous. The event that the number of happenings beginning in the time interval $(0, t + \Delta t)$ is $\leq n$, the probability of which is equal to $W(t + \Delta t, n)$, can be produced in the following ways, mutually excluding each other: 1) n happenings begin in the interval $(0, t)$ and no happening begins in the interval $(t, t + \Delta t)$ (the probability of the latter being smaller than 1, and greater than or equal to that of no event occurring in the interval $(t, t + \Delta t)$ and this latter probability being $[1 - p\Delta t - o(\Delta t)]$); 2) or, $n-1$ happenings begin in the interval $(0, t)$ and one happening begins in the interval $(t, t + \Delta t)$, the probability whereof is small-

ler than or equal to the probability of one event occurring in the interval $(t, t + \Delta t)$, and the probability hereof is $p\Delta t + o(\Delta t)$, and is greater than or equal to zero (more exactly, it is $o(\Delta t)$); 3) or else less than $n-1$ happenings begin in the interval $(0, t)$ and more than one in the interval $(t, t + \Delta t)$, the probability whereof is $o(\Delta t)$. Thus

$$W(t + \Delta t, n) \leq W(t, n) + W(t, n-1)(p\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

and

$$W(t + \Delta t, n) \geq W(t, n)[1 - p\Delta t - o(\Delta t)] + W(t, n-1)o(\Delta t) + o(\Delta t)$$

and therefore

$$-p\Delta t + o(\Delta t) \leq W(t + \Delta t, n) - W(t, n) \leq p\Delta t + o(\Delta t)$$

from which the continuity of $W(t, n)$ follows.

Let us denote in the process beginning at the time $u = 0$ the starting points of the consecutive happenings by $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. Then the probability of not more than n happenings starting in the interval $(0, t)$ is equal to that of the $(n+1)$ -st happening starting at a moment later than t , that is to say,

$$(44) \quad W(t, n) = P(t < u_{n+1}).$$

As $P(t < u_{n+1}) + P(u_{n+1} \leq t) = 1$, therefore

$$(45) \quad W(t, n) = 1 - P(u_{n+1} \leq t).$$

Let the difference of the starting points of two consecutive happenings be $\xi_i = u_i - u_{i-1}$ ($i = 2, 3, \dots$) and $\xi_1 = u_1$, then

$$(46) \quad W(t, n) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t).$$

The random variables $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ are mutually independent. The introduction of the difference of the starting points of consecutive happenings, and thereby the reduction of the problem to the determination of the distribution function of a sum of independent random variables, can be found in the works of various authors, for instance, in the work [2] of R. FORTET.

The density function of ξ_1 is $g_1(x) = e^{-px}p$. The variables ξ_2, ξ_3, \dots possess the same probability density function

$$(47) \quad g(x) = p \int_0^x e^{-p(x-\eta)} dH(\eta)$$

for the following reason. The difference of the starting points of two consecutive happenings can possess the value x only if the duration of the happening is equal to η , and if, following it, after the lapse of a length of time $x - \eta$, an event occurs, which is at the same time also the starting point of a happening.

The density functions $g_1(x)$ and $g(x)$ are continuous. The Laplace transform of $g_1(x)$ is $\gamma_1(s) = \frac{p}{p+s}$ and the Laplace transform of $g(x)$ is $\gamma(s) = \frac{p}{p+s} \psi(s)$. Both are convergent, if $\Re(s) \geq 0$. As the random variables

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ are mutually independent, the Laplace transform of the density function of the random variable $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1}$ is equal to the product of the Laplace transforms of the individual variables ξ_i , that is to say, to $\gamma_1(s)[\gamma(s)]^n$. Further, the Laplace transform of the distribution function of the random variable $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1}$ is obtained on division by s , and thus

$$(48) \quad \omega_n(s) = \frac{1}{s} \frac{\gamma_1(s)[\gamma(s)]^n}{s} = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{p^{n+1}[\psi(s)]^n}{(p+s)^{n+1}} \right]$$

which is convergent if $\Re(s) > 0$.

If $\omega_n(s)$ is known, $W(t, n)$ can be determined in all its points of continuity, and as $W(t, n)$ is continuous, it can be determined for all values of t .

REMARK 1. It follows from (1) that the Laplace transform of $m(t)$ is

$$(49) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{s} - \omega_n(s) \right] = \frac{\gamma_1(s)}{s} \sum_{n=0}^{\infty} [\gamma(s)]^n = \frac{\gamma_1(s)}{s[1-\gamma(s)]} = \frac{p}{s[p+s-p\psi(s)]},$$

taking into account that if $\Re(s) > 0$, it follows $|\gamma(s)| < 1$, and thus the series is convergent. This formula is in accordance with the result obtained earlier.

REMARK 2. Denoting by $m_r(t)$ the r th moment of $W(t, n)$, if this is finite, we have

$$(50) \quad m_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] [1 - W(t, n)].$$

The Laplace transform of this is

$$(51) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} m_r(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] \frac{p^{n+1}[\psi(s)]^n}{s(p+s)^{n+1}} = \frac{p}{s} \sum_{j=1}^r \mathfrak{S}_r^j \frac{j! [p\psi(s)]^{j-1}}{[p+s-p\psi(s)]^j}$$

where \mathfrak{S}_r^j denote Stirling numbers of second kind. Here we have applied the well-known relation

$$(52) \quad n^r = \sum_{j=1}^r \mathfrak{S}_r^j \frac{n!}{(n-j)!}.$$

EXAMPLE 1. $\xi = \alpha$ (constant). In this case $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ and

$$(53) \quad \omega_n(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{n+1} e^{-s\alpha n} = \frac{1}{s} - \left[\frac{1}{s} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{p^{j-1}}{(p+s)^j} \right] e^{-s\alpha n}$$

and thus

$$(54) \quad W(t, n) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{p^{j-1} (t - n\alpha)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-p(t-n\alpha)} & \text{if } n\alpha \leq t, \\ 1 & \text{if } n\alpha \geq t. \end{cases}$$

In case $n\alpha \leq t$ we can write (54) in the form

$$W(t, n) = 1 - \int_0^{t-n\alpha} e^{-px} \frac{(px)^n}{n!} p dx.$$

EXAMPLE 2. The distribution function of ξ is $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$. In this case $\psi(s) = \frac{1}{1 + \alpha s}$ and if $\frac{1}{\alpha} \neq p$, then

$$(55) \quad \omega_n(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{n+1} \left(\frac{1}{1+\alpha s} \right)^n = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{A_j}{(p+s)^j} + \sum_{j=1}^n \frac{B_j \alpha^j}{(1+\alpha s)^j}$$

where

$$A_j = p^{j-1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-j} \binom{n+k-j}{k-1} \frac{\alpha^{n+2-j} p^{n+1}}{(1-\alpha p)^{n+k-j+1}}$$

and

$$B_j = \frac{1}{\alpha^{j-1}} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+k-j+1}{k-1} \frac{p^{k-1}}{\alpha^{j-k} (1-\alpha p)^{n+k-j}};$$

if $\frac{1}{\alpha} = p$ it follows that

$$(56) \quad \omega_n(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{2n+1} = \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{p^{j-1}}{(p+s)^j}.$$

In accordance herewith, if $\frac{1}{\alpha} \neq p$, then

$$(57) \quad W(t, n) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{A_j \cdot t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-pt} + \sum_{j=1}^n \frac{B_j \cdot t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-t/\alpha}$$

and if $\frac{1}{\alpha} = p$, then

$$(58) \quad W(t, n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{(pt)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-pt}.$$

It is worth mentioning that the distribution function (58) can be obtained from the Poisson distribution by adding the probabilities of each two consecutive integer values.

This can be deduced also directly. Notably, $W(t, n) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t)$, where the density function of ξ_1 is $g_1(x) = e^{-p} p$, and the density function of $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+1}$ is $g_1(x) * g_1(x)$, i. e. the composition of $g_1(x)$ with itself. As $g_1(x)$ is the density function of the consecutive events in a Poisson process characterized by the density p , it follows that $P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t)$ is the probability of at least $2n+1$ events occurring during the length of time t . The probability hereof is

$$(59) \quad P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t) = \int_0^t e^{-pu} \frac{(pu)^{2n}}{(2n)!} p du = 1 - \sum_{j=0}^{2n} e^{-pt} \frac{(pt)^j}{j!}$$

and thus (58) can be confirmed in this way also.

Similarly, (57) can be produced as a composition of Poisson distributions.

§ 6. The determination of $\Omega(t, z)$

$\Omega(t, z)$ will denote the distribution function of the duration of the happenings taking place in the time interval $(0, t)$, in a process of happenings which started at the moment $u = 0$.

The distribution function of the duration of a happening is $H(x)$. Let $H_n(x)$ be the n -fold convolution of $H(x)$. If the Laplace-Stieltjes transform of $H(x)$ is

$$(60) \quad \psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x),$$

then the Laplace transform of $H_n(x)$ is

$$(61) \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} H_n(x) dx = \frac{[\psi(s)]^n}{s}$$

which enables us to determine $H_n(x)$ for all continuous values of x . (We put $H_0(x) = 0$, if $x < 0$ and $H_0(x) = 1$, for $x \geq 0$.)

As we saw, in our process the happenings and intermissions change. The density function of the intermissions is $e^{-px} p$. The Laplace transform of this is

$$(62) \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-px} p dx = \frac{p}{p+s}.$$

Let the distribution function of the convolution of n intermissions be $G_n(x)$. The Laplace transform of this is

$$(63) \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} G_n(x) dx = \frac{1}{s} \left(\frac{p}{p+s} \right)^n$$

from which we obtain

$$(64) \quad G_n(x) = \int_0^x e^{-px} \frac{(px)^{n-1}}{(n-1)!} p dx = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-px} \frac{(px)^j}{j!}.$$

The distribution function of the duration of the happenings taking place in the time interval $(0, t)$, is

$$(65) \quad \Omega(t, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} H_n(z) e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} & \text{if } 0 \leq z \leq t, \\ 1 & \text{if } t \leq z. \end{cases}$$

PROOF. Let us denote the duration of the consecutive happenings by the random variables $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ and let $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \zeta_n$. (The variables ξ_k are not the same, as in the last section.) Since $P(\xi_k \leq x) = H(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) and the random variables ξ_k are independent, we have $P(\zeta_n \leq x) = H_n(x)$. Let us denote the duration of the consecutive intermissions by the random variables $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ and put $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n = \chi_n$. Then $P(\eta_k \leq x) = 1 - e^{-px}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) and $P(\chi_n \leq x) = G_n(x)$, since the variables η_k are independent

Let n denote the number of the happenings taking place in the time interval $(0, t)$. If $n = 0$, — the probability of which equals e^{-pt} — then $z = 0$. If $n \geq 1$ then there are two cases to distinguish: the happenings taking place in the time interval $(0, t)$ are terminated in the interval $(0, t)$, or not. The probability of the event that n happenings are starting and terminated in the time interval $(0, t)$ and the duration in question is $\leq z$, is equal to the probability of the simultaneous occurrence of the following events: $0 \leq \xi_n \leq z$ and $\xi_n + \chi_n \leq t < \xi_n + \chi_{n+1}$. The probability of the event that there are n happenings starting in the time interval $(0, t)$ and the n th is not terminated and the duration in question is $\leq z$, is equal to the probability of the simultaneous occurrence of the following events: $t - z \leq \chi_n \leq t$ and $\chi_n + \xi_{n-1} \leq t < \chi_n + \xi_n$. In the first case the duration of the happenings should be $\leq z$, i. e. $\xi_n = x$ where $0 \leq x \leq z$ and $\chi_n = t - x < \chi_{n+1}$. In the second case the duration of the intermissions should be $\geq t - z$, i. e. $\chi_n = x$ where $t - z \leq x \leq t$ and $\xi_{n-1} = t - x < \xi_n$.

Taking into consideration that $P(\chi_n \leq t - x < \chi_{n+1}) = G_n(t - x) - G_{n+1}(t - x)$ and $P(\xi_{n-1} \leq t - x < \xi_n) = H_{n-1}(t - x) - H_n(t - x)$, we obtain easily the following result:

$$(66) \quad \Omega(t, z) = e^{-pt} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \right) \left\{ \int_0^z [G_n(t-x) - G_{n+1}(t-x)] dH_n(x) + \int_{t-z}^t [H_{n-1}(t-x) - H_n(t-x)] dG_n(x) \right\}.$$

Since

$$\int_0^z G_n(t-x) dH_n(x) = \int_{t-z}^t H_n(t-x) dG_n(x) = H_n(z) G_n(t-z)$$

and

$$\int_0^z G_{n+1}(t-x) dH_n(x) = \int_{t-z}^t H_n(t-x) dG_{n+1}(x) = H_n(z) G_{n+1}(t-z),$$

further

$$\int_{t-z}^t H_0(t-x) dG_1(x) = e^{-p(t-z)} - e^{-pt},$$

therefore we have for $\Omega(t, z)$ the following expression:

$$(67) \quad \Omega(t, z) = e^{-p(t-z)} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(z) [G_n(t-z) - G_{n+1}(t-z)].$$

Here $G_n(t-z) - G_{n+1}(t-z)$ is the probability of the occurrence of n events during the time interval $t-z$ in a Poisson process of density p , i. e.

$$(68) \quad G_n(t-z) - G_{n+1}(t-z) = e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!}.$$

Finally it results

$$(69) \quad \Omega(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!}.$$

REMARK 1. The average duration of the happenings taking place in the interval $(0, t)$ is

$$(70) \quad \tau(t) = \int_0^t [1 - \Omega(t, z)] dz.$$

The Laplace transform of this is

$$(71) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} \tau(t) dt = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\psi(s)]^n}{s} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{n+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \frac{1}{p+s-p\psi(s)},$$

as obtained previously. By means of the Laplace transform we can easily determine $\tau(t)$.

REMARK 2. The r th moment of the duration of the happenings taking place in the interval $(0, t)$ is

$$(72) \quad \tau_r(t) = \int_0^t z^r d_z \Omega(t, z) = r \int_0^t z^{r-1} [1 - \Omega(t, z)] dz.$$

Let the Laplace transform of this be

$$(73) \quad \Phi_r(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \tau_r(t) dt,$$

then by means of (65) we have

$$(74) \quad \Phi_r(s) = \frac{r!}{s^{r+1}} - r \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{p^n}{(p+s)^{n+1}} \cdot \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left(\frac{[\psi(s)]^n}{s} \right)$$

from which $\tau_r(t)$ can be determined.

EXAMPLE. Let the duration of the happenings be $\xi = \alpha$ (constant). Then we have

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < \alpha, \\ 1 & \text{if } x \geq \alpha, \end{cases} \quad \text{and} \quad H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < n\alpha, \\ 1 & \text{if } x \geq n\alpha. \end{cases}$$

By means of (65) we have

$$(75) \quad \Omega(t, z) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{t-z}{\alpha} \right]} e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} \quad \text{if } 0 \leq z \leq t.$$

We can also write this expression as

$$(76) \quad \Omega(t, z) = 1 - G_{k+1}(t-z) = 1 - \int_0^{t-z} e^{-px} \frac{(px)^k}{k!} p dx$$

where $k = \left[\frac{z}{\alpha} \right]$.

§ 7. Stationary processes

In the preceding sections we have discussed the case in which the process has begun at the moment $u = 0$, and it was in the interval $(0, t)$ that we examined the mean values of the number of happenings and that of the duration of happenings as well as their distribution functions. If the process has already been going on for an endless time, and the mean values and the distribution functions of the number and the duration of happenings is being examined in some time interval of the length t , these will result as independent of the starting point of the interval examined, and will depend only on the length of the said interval. In this case we call the process *stationary*.

Now also, the mean values can be determined in a simple way by the probabilities of beginning and of happening, on the basis of the formulas (13) and (14), their values being now constant, viz.

$$(77) \quad f^* = \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \frac{p}{1 + \alpha p}$$

and

$$(78) \quad F^* = \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \frac{\alpha p}{1 + \alpha p}.$$

Accordingly, in the case of a stationary process we have

$$(79) \quad m^*(t) = \frac{pt}{1 + \alpha p}$$

and

$$(80) \quad \tau^*(t) = \frac{\alpha pt}{1 + \alpha p}.$$

Let us now denote by $W^*(t, n)$ the probability distribution of the number of happenings beginning in a time interval of length t .

$W^*(t, n)$ is continuous for all values of t , consequently its Laplace transform

$$(81) \quad \omega_n^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} W^*(t, n) dt$$

is convergent if $\Re(s) > 0$ and

$$(82) \quad \omega_n^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \frac{p}{1 + \alpha p} \left(1 - \frac{p\psi(s)}{p+s} \right) \left(\frac{p}{p+s} \right)^n (\psi(s))^n$$

which enables $W^*(t, n)$ to be determined for all continuous values of t , that is, for all values of t .

PROOF. The continuity of $W^*(t, n)$ can be proved in the same way as that of $W(t, n)$. Similarly to the treatment of the question employed in the preceding section, and, using the same notations, we can write

$$(83) \quad W^*(t, n) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t)$$

where, however, the density function of the probability variable ξ_1 is, differently from the preceding one,

$$(84) \quad g_1(x) = \frac{p}{1 + \alpha p} [1 - G(x)].$$

The reason hereof is that if the distribution function $G(x)$ of the duration of any event is continuous, and its mean is μ , then the probability of any event just going on at a given moment should terminate within a time not exceeding x , is equal, as well-known [4], to

$$(85) \quad \int_0^x \frac{1 - G(x)}{\mu} dx,$$

and the density function of this probability is

$$(86) \quad \frac{1 - G(x)}{\mu}.$$

In our case $G(x)$ is the distribution function belonging to the density function $g(x)$ defined under (47), and

$$(87) \quad \mu = \int_0^{\infty} x g(x) dx = \frac{1}{p} + \alpha = \frac{1 + \alpha p}{p}.$$

The Laplace transform of $g_1(x)$, which is for $\Re(s) \geq 0$ convergent, is

$$(88) \quad \gamma_1(s) = \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{p \psi(s)}{p + s} \right].$$

With the aid of the latter we obtain, in a manner similar to the treatment employed in the previous section, the equation (82).

REMARK. The Laplace transform of the mean value of the number of happenings is

$$(89) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{s} - \omega_n^*(s) \right] = \frac{1}{s^2} \frac{p}{1 + \alpha p},$$

that is to say,

$$m^*(t) = \frac{pt}{1 + \alpha p}$$

as obtained previously.

EXAMPLE. $\xi = \alpha$ (constant). In this case $\psi(s) = e^{-s\alpha}$, and

$$(90) \quad \begin{aligned} \omega_n^*(s) &= \frac{1}{s} - \frac{p}{1 + \alpha p} \frac{1}{s^2} \left(\frac{p}{p + s} \right)^n e^{-s\alpha n} + \frac{p}{1 + \alpha p} \frac{1}{s^2} \left(\frac{p}{p + s} \right)^{n+1} e^{-s\alpha(n+1)} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{n}{p} \right) + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \frac{(n+1-k)p^{k-1}}{(p+s)^k} \right] e^{-s\alpha n} + \\ &+ \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{n+1}{p} \right) + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+2-k)p^{k-1}}{(p+s)^k} \right] e^{-s\alpha(n+1)} \end{aligned}$$

whence

$$\begin{aligned}
 (91) \quad W^*(t, n) = & 1 - \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\left(t - \frac{n}{p} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \frac{(n+1-k)p^{k-1}(t-\alpha n)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-p(t-\alpha n)} \right] + \quad ([] = 0 \text{ if } \alpha n > t) \\
 & + \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\left(t - \frac{n+1}{p} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+2-k)p^{k-1}(t-\alpha(n+1))^{k-1}}{(k-1)!} e^{-p(t-\alpha(n+1))} \right] \quad ([] = 0 \text{ if } \alpha(n+1) > t).
 \end{aligned}$$

It is surprising that, while in the case of a stationary process the computation of the mean value is more simple than in the case of a non-stationary process, the distribution function itself is more complicated.

Let $\Omega^*(t, z)$ denote the distribution function of the duration of the happenings taking place in an interval of length t . Then we have

$$(92) \quad \Omega^*(t, z) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \alpha p} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ H_n(z) + p \int_0^z [1 - H_n(x)] H(z-x) dx \right\} e^{-p(t-\alpha z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} & \text{if } 0 \leq z \leq t, \\ 1 & \text{if } z \geq t. \end{cases}$$

PROOF. If the process of happenings has already been going on for an endless time and the distribution function of the duration is to be examined, then we distinguish two cases: In the starting point of the interval there is a happening or an intermission. The probability of a happening going on at the starting point of this interval is $F^* = \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \frac{\alpha p}{1 + \alpha p}$ and the probability of an intermission going on at the starting point of this interval is $1 - F^* = \frac{1}{1 + \alpha p}$.

The distribution function of the duration of an intermission is $G_1(x) = 1 - e^{-px}$ and its mean value is $1/p$. Hence the probability of the event that an intermission just going on should terminate within a time not exceeding x , is equal to

$$(93) \quad \int_0^x \frac{1 - G_1(\xi)}{1/p} d\xi = 1 - e^{-px} = G_1(x),$$

i. e., this is the same as the distribution function of the first intermission in a process starting at the moment $u=0$. Hence under this condition the distribution function of the duration in question is $\Omega(t, z)$.

The probability of the event that a happening just going on should terminate within a time not exceeding x , is equal to

$$(94) \quad \int_0^x \frac{1-H(z)}{\alpha} dz.$$

If this happening terminated we have the same situation as in the starting point of a process which started at the moment $u=0$. Hence if there is a happening in the starting point of the time interval of the length t and if the duration of this happening is exactly x , then the probability in question is $\Omega(t-x, z-x)$.

Finally we have

$$(95) \quad \Omega^*(t, z) = \frac{1}{1+\alpha p} \Omega(t, z) + \frac{\alpha p}{1+\alpha p} \int_0^z \frac{1-H(x)}{\alpha} \Omega(t-x, z-x) dx.$$

Using the expression (65) of $\Omega(t, z)$, we have the result (92).

REMARK. The average duration of the happenings taking place in an interval of the length t is

$$(96) \quad \tau^*(t) = \int_0^t [1 - \Omega^*(t, z)] dz.$$

The Laplace transform of this is

$$(97) \quad \int_0^\infty e^{-st} \tau^*(t) dt = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+\alpha p} \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{[\psi'(s)]^n}{s} + p \frac{1 - \psi(s) [\psi'(s)]^n}{s} \right] \frac{p^n}{(p+s)^{n+1}} = \frac{1}{s^2} \frac{\alpha p}{1+\alpha p}$$

whence

$$(98) \quad \tau^*(t) = \frac{\alpha p}{1+\alpha p} t.$$

This formula is identical with the result obtained earlier.

EXAMPLE. Let the duration of the happenings be constant, $\xi = \alpha$. Then

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < n\alpha \\ 1 & \text{if } x \geq n\alpha \end{cases} \text{ and putting } k = \left\lfloor \frac{z}{\alpha} \right\rfloor \text{ we obtain}$$

$$(99) \quad \Omega^*(t, z) = \sum_{n=0}^{k-1} e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} + \frac{1 + p(z - k\alpha)}{1 + p\alpha} e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^k}{k!}.$$

II. COINCIDENCE PHENOMENA

§ 1. Formulation of the problem

Let us consider a system consisting of s processes of the type discussed in part I, going on simultaneously. It may then happen that in a given moment happenings are taking place in $0, 1, 2, \dots, s$ of these processes. We shall say that the system (the totality of s processes) is at the moment u in the condition E_j , if at this moment happenings are taking place simultaneously in j processes.

By definition we shall say that a coincidence exists at the moment u , if at least k ($k = 1, 2, \dots, s$) simultaneous happenings are taking place, i. e. if the system is in the condition E_j , where $j \geq k$. At a given moment a coincidence begins if a transition $E_{k-1} \rightarrow E_k$ presents itself.

The question is to determine the mean value $m_{sk}(t)$ of the number of coincidences beginning in the interval $(0, t)$ and their average duration $\tau_{sk}(t)$.

§ 2. Determination of the mean value

Now also, the mean values can be determined by introducing the following probabilities. Let $F_k(u)$ be the probability of the system being at the moment u in one of the conditions E_k, E_{k+1}, \dots, E_s . In this case it is easy to see that the probability of the system, which at the moment u was in the condition E_{k-1} , being at the moment $u + \Delta u$ in the condition E_k , can, in accordance with the method employed above, be written as follows: $f_k(u)\Delta u + o(\Delta u)$, or, in short, the conditional probability of the system which at the moment u was in the condition E_{k-1} , getting in the interval $(u, u + du)$ into the condition E_k is $f_k(u)du$. Thus, we may write that

$$(100) \quad m_{sk}(t) = \int_0^t f_k(u) du$$

and

$$(101) \quad \tau_{sk}(t) = \int_0^t F_k(u) du.$$

The proof is similar to the proofs of (13) and (14) given above.

Now

$$(102) \quad f_k(u) du = \binom{s}{k-1} [F(u)]^{k-1} [1 - F(u)]^{s-k+1} (s-k+1) p du.$$

The reason for this is that the probability of the transition $E_{k-1} \rightarrow E_k$ in the interval $(u, u + du)$ is equal to the probability of the following event: that at the moment u happenings should be going on in $k-1$ processes, and no happenings should be going on in $s-k+1$ processes, which probability can be obtained from BERNOULLI's formula relating to probabilities comprising repe-

titions, and that in one of the $s-k+1$ free processes there should begin between the moments u and $u+du$ an event, the probability of which is $(s-k+1)pdu$ which event is at the same time also the starting point of a happening, that is,

$$(103) \quad f_k(u) = ps \binom{s-1}{k-1} [F(u)]^{k-1} [1-F(u)]^{s-k+1}.$$

We would remark that the probability of an event beginning between the moments u and $u+Ju$ in one of the $s-k+1$ free processes is $\binom{s-k+1}{1} (pJu)(1-pJu)^{s-k} + o(Ju) \dots (s-k+1)pJu + o(Ju)$ and the probability of more than one event beginning is $o(Ju)$. Hence we may, for the sake of brevity, say that the probability of a happening starting in the time interval $(u, u+du)$ is $(s-k+1)pdu$.

The probability of a coincidence at the moment u is equal to the probability of happenings going on in k or more processes, that is,

$$(104) \quad F_k(u) = \sum_{j=k}^s \binom{s}{j} [F(u)]^j [1-F(u)]^{s-j}.$$

§ 3. Stationary systems of processes

In the preceding two sections systems of processes beginning at the moment $u=0$ have been examined in the interval $(0, t)$. Now let us suppose that the processes have been going on for an endless time, and the phenomenon is being examined in some time interval of the length t . In this case the mean values and probability distributions are independent of the starting point of the interval, and depend only on its length: such systems of processes are called *stationary*.

In this case the values of $f_k(u)$ and $F_k(u)$ will be constant, viz.

$$(105) \quad f_k^* = ps \binom{s-1}{k-1} [F^*]^{k-1} [1-F^*]^{s-k+1}$$

and

$$(106) \quad F_k^* = \sum_{j=k}^s \binom{s}{j} [F^*]^j [1-F^*]^{s-j}.$$

The mean values will be

$$(107) \quad m_{sk}^*(t) = ps \binom{s-1}{k-1} \left(\frac{\alpha p}{1+\alpha p} \right)^{k-1} \left(\frac{1}{1+\alpha p} \right)^{s-k+1} t$$

and

$$(108) \quad \tau_{sk}^*(t) = \sum_{j=k}^s \binom{s}{j} \left(\frac{\alpha p}{1+\alpha p} \right)^j \left(\frac{1}{1+\alpha p} \right)^{s-j} t.$$

If we denote the density of the happenings starting in one process by

$$(109) \quad \bar{n} = \frac{p}{1 + \alpha p},$$

we shall arrive at the equation

$$(110) \quad m_{sk}^*(t) = s \binom{s-1}{k-1} (\alpha \bar{n})^{k-1} (1 - \alpha \bar{n})^{s-k} \bar{n} t$$

which formula, in the case of the coincidence countings of experimental physics supplies the average number of the so-called chance-coincidences.

The results obtained here can be utilized in practice in connection with the simultaneous operation of a plurality of machines, in connection with the dimensioning of telephone centrals and for solving the problems occurring in the particle countings of experimental physics.

Finally, I would express my best thanks to Prof. A. RÉNYI for his numerous valuable remarks in preparing this paper.

INSTITUTE FOR APPLIED MATHEMATICS
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 30 September 1951)

Bibliography

- [1] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bd. 1 (Basel, 1950).
- [2] R. FORTET, *Probabilité de perte d'un appel téléphonique* (XIII. Le calcul des probabilités et ses applications, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1944), pp. 105—113.
- [3] A. KHINTCHINE, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Ergebnisse der Mathematik, Bd. 2, Berlin, 1933), p. 19.
- [4] S. MALMQUIST, A statistical problem connected with the counting of radioactive particles, *Annals of Mathematical Statistics*, **18** (1947), pp. 255—264.
- [5] R. E. A. C. PALEY and N. WIENER, *Fourier transforms in the complex domain* (New-York, 1934).
- [6] A. RÉNYI, On some problems concerning Poisson processes, *Publicationes Mathematicae*, **2** (1951), pp. 66—73.
- [7] V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégralo-différentielles* (Paris, 1915).

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ НАСТУПЛЕНИЯ И КОИНЦИДЕНЦИИ В СЛУЧАЕ ПРОИСШЕСТВИЙ, С ЛЮБЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ

Л. ТАКАЧ (Будапешт)

(Резюме)

Рассмотрим стохастический процесс типа Пуассона. Пусть p плотность числа событий. Определим следующим образом новый процесс: предположим, что каждое событие является исходным пунктом некоторого происшествия, если событие наступает в такой момент, когда нет происшествия. Продолжительность происшествий: ξ является случайной величиной с функцией распределения $H(x)$.

Пусть $W(t, n)$ вероятность того, что число происшествий, начинающихся в период $(0, t)$ будет $\leq n$. Пусть $m(t)$ обозначает математическое ожидание происшествий, начинающихся в период $(0, t)$ а $\tau(t)$ математическое ожидание продолжительности этих происшествий в период $(0, t)$.

Пусть $F(u)$ вероятность того, что в момент u как раз протекает происшествие; тогда вероятность того, что в период $(u, u + \Delta u)$ как раз начнется происшествие есть $f(u) \Delta u + o(\Delta u)$, где

$$f(u) = p[1 - F(u)].$$

$f(u)$ ограничена, непрерывна и удовлетворяет интегральному уравнению второго рода Вольтерры:

$$f(u) = p - p \int_0^u f(x) [1 - H(u-x)] dx.$$

Из этого уравнения $f(u)$ может быть определена при помощи преобразования Лапласа.

При помощи $f(u)$, $m(t)$ и $\tau(t)$ могут быть выражены следующим образом:

$$m(t) = \int_0^t f(u) du \quad \text{и} \quad \tau(t) = \int_0^t F(u) du = t - \frac{m(t)}{p}.$$

Относительно асимптотического поведения $f(u)$ справедлива следующая теорема:

Если среднее продолжительности происшествий

$$\alpha = \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx$$

конечно, то

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \frac{p}{1 + \alpha p}.$$

Это доказывается при помощи теоремы Paley—Wiener-a.

$W(t, n)$ может быть вычислено также с помощью преобразования Лапласа.

Если вышеуказанный процесс протекает уже бесконечно долго и вышеуказанные значения вычисляются в некотором интервале времени длины t , то обозначив соответствующие значения звёздочкой, имеем

$$m^*(t) = \frac{pt}{1 + \alpha p} \quad \text{и} \quad \tau^*(t) = \frac{\alpha pt}{1 + \alpha p}.$$

Дальше рассмотрены и решены проблемы коинциденции в случае если происходит одновременно с процессом выше рассмотренного типа.

RESTGLIED EINES TAUBERSCHEN SATZES. I

Von
GÉZA FREUD
(Vorgelegt von P. TURÁN)

I. Einleitung

Es sei

$$(1) \quad f(t) \geq 0$$

und

$$(2) \quad F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} d\tau.$$

$\tau(t)$ ist eine im Intervall $0 \leq t < \infty$ definierte, monoton nicht abnehmende Funktion, und das rechtsstehende Stieltjes'sche Integral sei konvergent für $s > 0$. Die wichtigsten Spezialfälle von (2) sind die Laplace-Transformation ($\tau(t) = t$), die allgemeine Dirichletsche Reihe, und als Sonderfall des letzteren die Potenzreihe

$$(2a) \quad F_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}.$$

Wir wollen zeigen:

SATZ. Vorausgesetzt, daß α eine positive Zahl ist, und

$$(3) \quad F(s) = S \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^\alpha} [1 + r(s)]$$

mit

$$(4) \quad |r(s)| < c_0 s^\varepsilon$$

für reelle $s > 0$ gilt (c_0 und ε sind von s unabhängige positive Zahlen), dann ist die Abschätzung

$$(5) \quad \int_{t=0}^x f(t) d\tau = S x^\alpha [1 + \varrho(x)]$$

mit

$$(6) \quad |\varrho(x)| < \frac{c_1}{\log x} \quad \text{für } x > 2$$

gültig.

Hier bedeutet c_1 (und im folgenden c_2, c_3, \dots, c_{27}) positive Zahlen, die höchstens von α, ε und c_0 abhängen. (Es ist bemerkenswert, daß c_1 in Formel (6) von $\tau(t)$ unabhängig ist.)

Im Spezialfalle der Potenzreihe (2a) kann die Bedingung (1) (die jetzt $a_n \geq 0$) ist durch die schwächere

$$(1a) \quad a_n \geq -Kn^{\alpha-1}$$

ersetzt werden. Man muß einfach zu (2a) die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} Kn^{\alpha-1} e^{-ns} = K \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] \quad \text{für } s > 0$$

addieren. Somit werden die Bedingungen (1) und (3) mit $S' = S + \frac{K}{\alpha}$ befriedigt.

Allgemeiner, gilt für $\tau(t)$ die Beziehung

$$(b) \quad \int_{t=0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-st} dt = \frac{A}{s^\alpha} \left[1 + O\left(\frac{1}{s^\alpha}\right) \right], \quad \alpha > 0, \quad \text{für } s > 0,$$

dann kann man die Bedingung (1) durch die schwächere

$$(1b) \quad f(t) > -Kt^{\alpha-1}$$

ersetzen. c_1 wird dann eine Funktion von $\alpha, \varepsilon, \alpha, c_0, A$ und K sein.

Diesen Satz habe ich (allerdings für den Sonderfall $\alpha=1$) schon in 1945 bewiesen, und den Beweis Herrn Professor P. TURÁN am 2. Mai 1945 brieflich mitgeteilt. Die hier veröffentlichte Form des Beweises entstand durch mehrfaches Umarbeiten. Professor TURÁN machte mich gefälligst auf ähnliche Resultate von J. KOREVAAR aufmerksam. KOREVAAR schreibt in einem Briefe, datiert 19. IV. 1951., an P. ERDÖS, daß er bei demselben Problem im Falle einer Potenzreihe (also (2a)) die schwächere Abschätzung

$$(7) \quad |\varrho(x)| < c_1 \frac{\log \log x}{\log x}$$

bewiesen hat. Andererseits ist es ihm gelungen, ein Beispiel zu geben, aus welchem ersichtlich ist, daß die von mir angegebene Abschätzung (6) nicht einmal für den Fall der Potenzreihe und $\varepsilon=1$ verbessert werden kann, sogar wenn man statt (1a) $a_n = O(n^{\alpha-1})$ verlangt.

Professor TURÁN hat mich zu Dank verpflichtet, daß er mir KOREVAARS Brief zur Verfügung stellte, und mich zur Anfertigung dieser Arbeit anregte.

Der Gedankengang des Beweises folgt der Schlußweise von J. KARAMATA [4]. Außer des Karamataschen Lemmas werden ausschließlich Sätze über Approximation durch Polynome, und ein Satz von BERNSTEIN über die Abschätzung der Koeffizienten eines Polynoms benutzt.

In Kapitel V werden einige einfache Verallgemeinerungen angegeben. In einer folgenden Mitteilung werde ich beweisen, daß für die k -ten Cesàroschen

Mittel von $\sum a_n$ bzw. $\int_{t=0}^x f(t) dt$ das bessere Restglied $|\varrho(x)| < \frac{c}{(\log x)^{k+1}}$ gültig ist.

II. Approximation einer stückweise stetigen Funktion durch Polynome

Wir wollen eine bekannte Polynomkonstruktion von MARKOFF [6] verwenden. Es seien $t_0(x), t_1(x), \dots, t_n(x), \dots$ im Intervall $(0, 1)$ mit der Gewichtsfunktion $(\log 1/x)^{\alpha-1}$ orthogonale Polynome, und $x_{1n} < x_{2n} < \dots < x_{nn}$ seien die Wurzeln von $t_n(x)$.

Wir bilden das Polynom $P_n(x)$ vom höchstens $2n-2$ -ten Grade, definiert durch

$$(8) \quad \begin{aligned} P_n(x_{1n}) &= P_n(x_{2n}) = \dots = P_n(x_{vn}) = P_n(x_{v+1,n}) = 1, \\ P_n(x_{v+2,n}) &= \dots = P_n(x_{nn}) = 0, \\ P'_n(x_{1n}) &= P'_n(x_{2n}) = \dots = P'_n(x_{vn}) = 0, \\ P'_n(x_{v+2,n}) &= \dots = P'_n(x_{nn}) = 0. \end{aligned}$$

MARKOFF, und von ihm unabhängig STIELTJES haben bewiesen, daß

$$(9) \quad P_n(x) \geq \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq x_{v+1}, \\ 0 & \text{für } x_{v+1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ähnlicherweise sei $p_n(x)$ das Polynom vom höchstens $2n-2$ -ten Grade, definiert durch

$$(10) \quad \begin{aligned} p_n(x_{1n}) &= p_n(x_{2n}) = \dots = p_n(x_{v-1,n}) = 1, \\ p_n(x_{vn}) &= p_n(x_{v+1,n}) = \dots = p_n(x_{nn}) = 0, \\ p'_n(x_{1n}) &= p'_n(x_{2n}) = \dots = p'_n(x_{v-1,n}) = 0, \\ p'_n(x_{v+1,n}) &= \dots = p'_n(x_{nn}) = 0; \end{aligned}$$

dann wird

$$(11) \quad p_n(x) \leq \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq x_v, \\ 0 & \text{für } x_v \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Das Polynom $P_n(x) - p_n(x)$ vom höchstens $2n-2$ -ten Grade nimmt an den Stellen x_{vn} und $x_{v+1,n}$ den Wert $+1$ an, und verschwindet an allen anderen Stellen x_{kn} . Also wird

$$(12) \quad \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} [P_n(x) - p_n(x)] dx = \lambda_{vn} + \lambda_{v+1,n}.$$

Hier bedeutet λ_{vn} die zur Stelle x_{vn} gehörige Cotes'sche Zahl der mechanischen Quadratur über den Grundpunkten $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}$, im Intervall $(0, 1)$, mit der Gewichtsfunktion $(\log 1/x)^{\alpha-1}$. Wir wollen v von n abhängig so bestimmen, daß

$$(13) \quad x_{vn} \leq \xi < x_{v+1,n}$$

wird; ξ ist von n unabhängig, und $0 < \xi < 1$.

Wie leicht beweisbar, gilt dann

$$(14) \quad 0 < \lambda_{vn} < \frac{c_2}{n} \quad \text{und} \quad 0 < \lambda_{v+1,n} < \frac{c_2}{n},$$

wobei c_2 noch von ξ abhängt. Der Beweis von (14) wird im Anhang nachgeholt.

Es sei ferner

$$(15) \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \xi, \\ 0 & \text{für } \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dann folgt aus (9), (11), (12), (13) und (15)

$$(16) \quad p_{n\xi}(x) \leq f(x) \leq P_{n\xi}(x),$$

sowie

$$(17) \quad \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} [P_{n\xi}(x) - p_{n\xi}(x)] dx < \frac{c_3}{n}.$$

Hier sind $P_{n\xi}(x)$ und $p_{n\xi}(x)$ Polynome vom höchstens $2n-2$ -ten Grade, die mittels (8), (10) und (13) definiert sind. Die Ungleichung (17) gilt dann mit $c_3 = 2c_2$, die eine Funktion von ξ ist.

Es sei nun $g(x)$ eine im Intervalle $(0, 1)$ stückweise stetige Funktion, die endlich-viele Sprungstellen hat, und in jedem Stetigkeitsteilintervall der Lipschitz'schen Bedingung

$$(18) \quad |g(x_1) - g(x_2)| < c_4 |x_1 - x_2|$$

genügt.

Ist x_1 (oder x_2) eine Sprungstelle von $g(x)$, so soll $g(x_1)$ den Grenzwert von $g(x)$ an der Stelle x_1 bei Annäherung von derselben Seite wie x_2 bedeuten. Es kann

$$(19) \quad g(x) = h(x) + H(x)$$

gesetzt werden, wo $H(x)$ eine lineare Kombination der Sprungfunktionen (15) ist:

$$(20) \quad H(x) = \sum_{\xi_k} [g(\xi_k - 0) - g(\xi_k + 0)] f_{\xi_k}(x),$$

und $h(x)$ im ganzen abgeschlossenen Intervall $(0, 1)$ der Lipschitz'schen Bedingung

$$(21) \quad |h(x_1) - h(x_2)| < c_5 |x_1 - x_2|$$

genügt. Wir definieren zwei Polynome $\vartheta_n(x)$ und $\theta_n(x)$ durch

$$(22) \quad \begin{aligned} \vartheta_n(x) &= \sum_{\xi_k} [g(\xi_k - 0) - g(\xi_k + 0)] p_{n\xi_k}^*(x), \\ \theta_n(x) &= \sum_{\xi_k} [g(\xi_k - 0) - g(\xi_k + 0)] P_{n\xi_k}^*(x), \end{aligned}$$

wobei

$$(23) \quad \begin{aligned} p_{n\xi_k}^*(x) &= \begin{cases} p_{n\xi_k}(x) & \text{für } g(\xi_k - 0) - g(\xi_k + 0) > 0, \\ P_{n\xi_k}(x) & \text{für } g(\xi_k - 0) - g(\xi_k + 0) < 0, \end{cases} \\ P_{n\xi_k}^*(x) &= \begin{cases} P_{n\xi_k}(x) & \text{für } g(\xi_k - 0) - g(\xi_k + 0) > 0, \\ p_{n\xi_k}(x) & \text{für } g(\xi_k - 0) - g(\xi_k + 0) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese sind höchstens vom $2n-2$ -ten Grade, und wegen (16), (17), (20) und (22) genügen sie den Ungleichungen

$$(24) \quad \vartheta_n(x) \leq H(x) \leq \theta_n(x)$$

und

$$(25) \quad \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} [\theta_n(x) - \vartheta_n(x)] dx < \frac{c_6}{n}.$$

$c_6 = \sum_{\xi_k} |g(\xi_k - 0) - g(\xi_k + 0)| c_3(\xi_k)$ hängt nur von α und $g(x)$ ab. (Die für unseren Zweck nötige spezielle Wahl von $g(x)$ siehe weiter unten in Gleichung (31).)

Aus (21) folgt [3], daß es ein Polynom vom höchstens n -ten Grade $\chi_n(x)$ gibt, für das im ganzen Intervall $(0, 1)$

$$(26) \quad |h(x) - \chi_n(x)| < \frac{c_7}{n}$$

gilt. c_7 hängt von c_5 in (21) und dem Maximum von $|h(x)|$ in $(0, 1)$ ab. Es sei nun

$$(27) \quad \varphi_n(x) = -\frac{c_7}{n} + \chi_n(x) + \vartheta_n(x),$$

$$(28) \quad \Phi_n(x) = \frac{c_7}{n} + \chi_n(x) + \theta_n(x).$$

Dann sind $\varphi_n(x)$ und $\Phi_n(x)$ Polynome vom höchstens $2n-2$ -ten Grade, und es gilt nach (19), (24), (25), (26), (27) und (28)

$$(29) \quad \varphi_n(x) \leq g(x) \leq \Phi_n(x),$$

sowie

$$(30) \quad \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)] dx < \frac{c_8}{n}$$

mit

$$c_8 = 2c_7 \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} dx + c_6.$$

Im weiteren sei

$$(31) \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq e^{-1}, \\ 1/x & \text{für } e^{-1} < x \leq 1; \end{cases}$$

somit werden (wie anfangs behauptet) c_2, c_3, \dots, c_8 nur von α abhängig sein. Aus (29), (30), (31) folgt

$$(32) \quad \int_0^\infty t^{\alpha-1} \Phi_n(e^{-t}) e^{-t} dt = \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} \Phi_n(x) dx < \int_{e^{-1}}^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} \frac{dx}{x} + \\ + \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)] dx < \frac{1}{\alpha} + \frac{c_8}{n},$$

und ähnlicherweise

$$(33) \quad \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \varphi_n(e^{-t}) e^{-t} dt > \frac{1}{\alpha} - \frac{c_8}{n}.$$

III. Abschätzung der Koeffizienten der Näherungspolynome

BERNSTEIN hat bewiesen [1], daß wenn das Polynom

$$(34) \quad \pi_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k x^k$$

im Intervall $(0, 1)$ der Ungleichung

$$(35) \quad |\pi_\nu(x)| \leq M$$

genügt, dann wird

$$(36) \quad |\alpha_k| \leq |\gamma_k| M \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \nu),$$

wo

$$(37) \quad T_{2\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \gamma_k x^{2k} = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^{2\nu} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{2\nu}]$$

das Tschebyscheffsche Polynom 2ν -ten Grades ist. Da die Vorzeichen dieses Polynoms (z. B. nach der Regel von DESCARTES) alternieren, wird

$$(38) \quad \sum_{k=0}^{\nu} |\gamma_k| = (-1)^{\nu} T_{2\nu}(\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} (|\sqrt{2} + 1|)^{2\nu} + \frac{1}{2} (|\sqrt{2} - 1|)^{2\nu}.$$

Aus (36) und (38) folgt

$$(39) \quad \sum_{k=0}^{\nu} |\alpha_k| < M(|\sqrt{2} + 1|)^{2\nu}.$$

Betrachten wir nun die im vorigen Kapitel konstruierten Polynome $\varphi_n(x)$ und $\Phi_n(x)$. Das Polynom $\Psi_n(x) = \Phi_n(x) - \varphi_n(x)$ $2n-2$ -ten Grades ist im Intervalle $(0, 1)$ positiv; sein Maximum sei $\eta_n = \Psi_n(X_n)$. Dann wird nach dem Satz von MARKOFF $|\Psi'_n(x)| \leq 2(2n)^2 \eta_n$ in $(0, 1)$, und somit gibt es ein Intervall von der Länge $\frac{1}{16n^2}$ (entweder links oder rechts von X_n), das in $(0, 1)$

fällt, und in dem $\Psi_n(x) \geq \frac{1}{2} \eta_n$ gilt. Somit wird nach (30)

$$(40) \quad \frac{c_8}{n} > \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} \Psi_n(x) dx > \frac{1}{2} \eta_n A_n,$$

wo

$$(41) \quad A_n = \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{16n^2}} (\log 1/x)^{\alpha-1} dx > c_9 \frac{(\log n)^{\alpha-1}}{n^2} & \text{für } \alpha \leq 1, \\ \int_{\frac{1}{16n^2}}^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} dx > c_{10} \frac{1}{n^{2\alpha}} & \text{für } \alpha > 1. \end{cases}$$

Aus (40) und (41) folgt, daß im Intervall $(0, 1)$ die Ungleichung

$$(42) \quad |\Psi_n(x)| \leq \eta_n < c_{11} n^{c_{12}}$$

besteht. So wird wegen $\varphi_n(x) \leq 1$

$$(43) \quad 0 \leq \Phi_n(x) = \Psi_n(x) + \varphi_n(x) < c_{13} n^{c_{12}},$$

und ähnlicherweise

$$(44) \quad |\varphi_n(x)| < c_{14} n^{c_{12}}.$$

Setzen wir

$$(45) \quad \Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-2} B_k x^k, \quad \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-2} b_k x^k,$$

dann wird aus (43), (44), (39)

$$(46) \quad \sum_{k=0}^{2n-2} |B_k| < c_{15} e^{c_{16} n}, \quad \sum_{k=0}^{2n-2} |b_k| < c_{15} e^{c_{16} n},$$

und somit

$$(47) \quad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{k^\varepsilon |B_k|}{(k+1)^\alpha} < c_{17} e^{c_{18} n}, \quad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{k^\varepsilon |b_k|}{(k+1)^\alpha} < c_{17} e^{c_{18} n}.$$

IV. Anwendung der Karamataschen Methode

Wir ersetzen in (2) und (3) s durch $(k+1)s$:

$$(48) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty f(t) (e^{-st})^k e^{-st} d\tau &= S \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^\alpha s^\alpha} [1 + r(ks)] = \\ &= S \frac{\alpha}{s^\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (e^{-t})^k e^{-t} dt + S \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} \frac{r(ks)}{(k+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren (48) mit B_k und summieren über k von 0 bis $2n-2$:

$$(49) \quad \int_0^\infty f(t) \Phi_n(e^{-st}) e^{-st} d\tau = S \frac{\alpha}{s^\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \Phi_n(e^{-t}) dt + S \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{2n-2} B_k \frac{r(ks)}{(k+1)^\alpha}.$$

Somit erhalten wir unter Verwendung von (32), (4) und (47):

$$(50) \quad \begin{aligned} \int_0^{1/s} f(t) d\tau &\leq \int_0^\infty f(t) \Phi_n(e^{-st}) e^{-st} d\tau < \frac{S}{s^\alpha} \left[\alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} dt + \frac{\alpha c_8}{n} + \right. \\ &\quad \left. + c_{10} s^\varepsilon \Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{k^\varepsilon |B_k|}{(k+1)^\alpha} \right] < \frac{S}{s^\alpha} \left(1 + \frac{c_{19}}{n} + c_{20} s^\varepsilon e^{c_{18} n} \right). \end{aligned}$$

Endlich sei

$$(51) \quad s = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad n = \left\lceil \frac{\varepsilon}{2c_{18}} \log x \right\rceil + 1;$$

so folgt

$$(52) \quad \frac{c_{10}}{n} + c_{20} S^t e^{v_{10} u} < \frac{2c_{10}c_{10}}{\varepsilon \log x} + c_{20} x^{\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{c_{21}}{\log x}$$

für $x \geq 2$. Wegen (50), (51) und (52) gilt somit

$$(53) \quad \int_0^x f(t) dt < Sx^\alpha \left(1 + \frac{c_{21}}{\log x} \right).$$

Ähnlich, statt Φ_n mit φ_n gerechnet:

$$(54) \quad \int_0^1 f(t) dt > Sx^\alpha \left(1 - \frac{c_{21}}{\log x} \right).$$

Aus (53) und (54) folgt (5) und (6) mit $c_1 = c_{21}$, was zu beweisen war.

V. Anhang. Verallgemeinerungen

Die Ungleichung $\lambda_{v_n} < \frac{c_2}{n}$. Wir folgen einem Gedanken von ERDÖS—TURÁN [2]. λ_{v_n} ist das Minimum des Integrals

$$(55) \quad \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} [\pi_n(x)]^2 dx,$$

wenn wir für $\pi_n(x)$ Polynome von höchstens $n-1$ -tem Grade mit $\pi_n(x_{v_n}) = 1$ zulassen. Wir wählen als Konkurrenzpolynom

$$(56) \quad \pi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)^2} \zeta_n(x) \frac{x}{x_{v_n}} & \text{für } \alpha \geq 1, \\ \frac{1}{(n-1)^2} \zeta_n(x) \frac{1-x}{1-x_{v_n}} & \text{für } \alpha < 1 \end{cases}$$

mit

$$(57) \quad \zeta_n(\cos \theta) = \left(\frac{\sin(n-1) \frac{\theta - \theta_{v_n}}{2}}{\sin \frac{\theta - \theta_{v_n}}{2}} \right)^2; \quad x = \cos \theta, \quad x_{v_n} = \cos \theta_{v_n}.$$

$\zeta_n(\cos \theta)$ ist (von einer Konstanten abgesehen) der Fejérsche Kern der Fourierreihe; es ist positiv, nimmt sein Maximum $(n-1)^2$ an der Stelle $\theta = \theta_{v_n}$ an, und ist überall kleiner als $c_{22}(\theta - \theta_{v_n})^{-2}$. Wegen $x_{v_n} \leq \xi < x_{v+1,n}$ gilt (s. STIELTJES [7]) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{v+1,n} = \xi$, so daß $\frac{1}{x_{v_n}}$ bzw. $\frac{1}{1-x_{v_n}}$ unter einer festen Schranke c_{21} bleibt. (Im Falle einer allgemeinen stückweise stetigen Funktion mit endlichvielen Sprungstellen wird diese Schranke von der Lage der Sprungstellen abhängen.)

Ferner bezeichnen wir mit c_{24} das Maximum von $x^2(\log 1/x)^{\alpha-1}$ bzw. $(1-x)^2(\log 1/x)^{\alpha-1}$ im Intervalle $(0, 1)$, je nachdem $\alpha \geq 1$ oder $\alpha < 1$ ist. Somit wird, (56) in (55) gesetzt,

$$(58) \quad \lambda_{\nu n} < \int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} [\pi_n(x)]^2 dx < c_{23} c_{24} \int_0^1 \frac{1}{(n-1)^4} [\zeta_n(x)]^2 dx < \\ < c_{25} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(n-1)^4} [\zeta_n(\cos \theta)]^2 d\theta < c_{26} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Min} \left(1, \frac{1}{(n-1)^4 (\theta - \theta_{\nu n})^4} \right) d\theta < \frac{c_{27}}{n}.$$

Eine ähnliche Abschätzung gilt auch für $\lambda_{\nu+1, n}$.

Verallgemeinerungen. Die eine Verallgemeinerungsmöglichkeit ist, statt (5) für

$$\int_{t=0}^t t^\beta f(t) dt, \quad \beta > 0$$

eine Asymptotik zu suchen. Das wird erreicht, indem wir statt (31)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < e^{-1}, \\ \frac{(\log 1/x)^\beta}{x} & \text{für } e^{-1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

wählen. Unser Beweis kann Schritt für Schritt übernommen werden, und wir erhalten

$$(5c) \quad \int_{t=0}^x t^\beta f(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} S x^{\alpha+\beta} [1 + \varphi^*(x)]$$

mit

$$(6c) \quad |\varphi^*(x)| < \frac{c_1^*}{\log x} \quad \text{für } x > 2,$$

wo c_1^* nur von α, ε, c_0 und β abhängt.

Eine weitere Verallgemeinerung erhalten wir, wenn wir statt (4)

$$(4d) \quad |r(s)| < R(s) \quad \text{für reelle } s > 0$$

voraussetzen. Dabei sei $R(s)$ eine monoton wachsende Funktion mit $R(0) = 0$ und

$$(59) \quad R(ks) < e^{c_{30}k} R(s) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Wie leicht ersichtlich, kann (47) durch

$$(47d) \quad \left| \sum_{k=0}^{2n-2} B_k \frac{r(ks)}{(k+1)^\alpha} \right| < c_{29} e^{c_{30}n} R(s)$$

ersetzt werden. Somit erhalten wir aus der rechten Seite von (52)

$$(52d) \quad \varphi^{**} \left(\frac{1}{s} \right) < \frac{c_{31}}{n} + c_{29} e^{c_{30}n} R(s).$$

Es sei nun

$$(5d) \quad s = \frac{1}{x}, \quad n = \left[\frac{1}{2c_{30}} \log \frac{1}{R(1/x)} \right] + 1,$$

dann wird offenbar für ein bestimmtes x_0 und $x > x_0$

$$(5d) \quad \int_{t=0}^x t^\beta f(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} S x^{\alpha + \beta} [1 + \varrho^{**}(x)]$$

mit

$$(5d) \quad |\varrho^{**}(x)| < \frac{c_1^{**}}{\log \frac{1}{R(1/x)}}.$$

(Eingegangen am 21. Oktober 1951.)

Literaturverzeichnis

- [1] S. N. BERNSTEIN, Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés dans un segment finit, *Acta Math.*, **37** (19), S. 3—6.
- [2] P. ERDŐS—P. TURÁN, On interpolation, II. *Annals of Math.*, **39** (1938), S. 703—724.
- [3] DUNHAM JACKSON, *The theory of approximation*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 11.
- [4] J. KARAMATA, Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes, *Math. Zeitschr.*, **32** (1930), S. 519—520.
- [5] K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 3. Aufl., S. 519—524.
- [6] A. A. МАРКОВ, Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева, *Избранные Труды* (Москва, 1948), стр. 20—21.
- [7] TH. J. STIELTJES, Quelques recherches sur la théorie des quadratur dites mécaniques, *Oeuvres Complètes*, (Groningen, 1914), Bd. 1, S. 377—394.
- [8] P. SZÁSZ, *A differenciál- és integrálszámítás elemei*, II. Aufl. (Budapest, 1951), §§. 411—414.

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ НЕКОТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ТИПА ТАУБЕРА, I

Г. ФРАЙД (Будапешт)

(Р е з ю м е)

Пусть $\tau(t)$ монотонно возрастающая функция ($0 \leq t < \infty$) и $f(t) \geq 0$, если $t \geq 0$, и пусть интеграл Лебега—Стилтьеса

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

сходится при любом $s > 0$. Пусть

$$F(s) = S \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^\alpha} [1 + r(s)], \quad |r(s)| < R(s),$$

где $R(s)$ монотонно возрастает, $R(0) = 0$ и $R(ks) < \exp(c_{28}k) \cdot R(s)$, где c_{28} не зависит от k и s . Доказывается, что в этом случае

$$\int_{t=1}^x t^\beta f(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} S x^{\alpha + \beta} [1 + \varrho^{**}(x)],$$

где

$$|\varrho^{**}(x)| < \frac{c_1^{**}}{\log \frac{1}{R(1/x)}}, \quad \text{если } x > x_0.$$

x_0 и c_1^{**} зависят лишь от α, β и $R(s)$.

ON ABELIAN GROUPS WITH COMMUTATIVE ENDOMORPHISM RING

By

T. SZELE (Debrecen) and J. SZENDREI (Szeged)

(Presented by L. RÉDEI)

§ 1. Introduction

As is well known, the endomorphism ring of an abelian group is in general neither commutative nor without zero divisors. This gives rise to the problem of describing all abelian groups with commutative endomorphism ring and those with endomorphism ring containing no zero-divisors. In a previous paper one of us has considered the latter problem [3]¹ and has succeeded in showing that there exists no such group among the mixed groups, while $C(p)$ and $C(p^\infty)$ are the only torsion groups of this property.² The present paper is devoted — leaving again the torsion free groups out of consideration — to abelian groups with commutative endomorphism ring. This problem will be solved completely for torsion groups; viz. we shall prove that the endomorphism ring of a torsion group is commutative if and only if the group is isomorphic with a subgroup of the group C of all rotations of finite order of the circle (Theorem 1). Moreover, we can characterize two sufficiently large classes of mixed groups with commutative endomorphism ring (Theorems 2 and 3), but we shall show that these two classes do not exhaust all mixed groups of this property. In describing the structure of the groups belonging to one of these classes we shall need a generalization of the direct sum which has played an important role in the theory of rings.

Lemma 1 (§ 3) gives an almost trivial necessary condition for the commutativity of the endomorphism ring of an abelian group. As easily one can show that this condition is necessary, it seems as difficult to prove in general that it also suffices. The results below lead us to conjecture that the condition mentioned above is always sufficient.

¹ The numbers in brackets refer to the Bibliography at the end of this paper.

² For the notations and terminology see § 2

We shall see that a torsion group with commutative endomorphism ring is always countable, but there exist mixed as well as torsion free groups of the power of the continuum with the same property. On the other hand, certain facts led us to the conjecture that the endomorphism ring of an abelian group of a cardinal number greater than the power of the continuum is never commutative. If this conjecture will prove to be true, then from the results of the present paper it is easy to conclude that every abelian group with commutative endomorphism ring is isomorphic with a rotation group of the circle.

§ 2. Preliminaries

In what follows by a *group* we shall mean always an additively written abelian group with more than one element. Groups will be denoted by Latin capitals and their elements by x, a, b, \dots, g ; the other small Latin letters are reserved for rational integers (in particular p, q for prime numbers). We shall denote the endomorphisms of a group by small Greek letters. A subgroup generated by certain elements a, b, \dots of a group is denoted by $\{a, b, \dots\}$. A group, every element of which is of finite order, is called a *torsion group*. In case every non-zero element of the group is of infinite order, the group is called *torsion free*. A group which is neither a torsion group nor torsion free, is said to be a *mixed group*. All elements of finite order of a mixed group form a subgroup which we call the *torsion subgroup* of the group.

Let p be an arbitrary prime number. If the group G contains an element of order p , then p is called an *actual prime* for G . The set of all actual primes for G will be called the *actual prime system* of G . If $pG = G$ for a prime p , then G is called *closed for p* . (Here pG denotes of course the set of all elements pg with $g \in G$.) If H is a subgroup of G and is closed for any actual prime for G , then we say that H is an *actually closed subgroup* of G . If $a \in G$ and the equation $p^n x = a$ is solvable in G for every natural number n , then a is said to be an element of *infinite height for the prime p in G* . Clearly, any element of order p^k is an element of infinite height for every prime different from p . The element a of G will be said to be of *actually infinite height in G* , in case a is of infinite height for each actual prime p for G . If G contains no element $\neq 0$ of actually infinite height, we call G a group without elements of actually infinite height.

For an endomorphism $g \rightarrow \varepsilon g$ of G we denote by εG the set of all elements of the form εg ($g \in G$) and call it an *endomorphie image* of G . The set K of all $x \in G$, for which $\varepsilon x = 0$, is called as usual the *kernel* of the endomorphism ε . If H is a subgroup of G and $\varepsilon H \subset H$ for every endomorphism ε of G , then H is a *fully invariant subgroup* in G .

We denote by R the additive group of all rational numbers, by $C(p^k)$ the cyclic group of order p^k for an arbitrary natural number k , and by $C(p^\infty)$

the additive group of all rational numbers mod 1 whose denominators are powers of p . The additive group of all rational numbers mod 1 will be denoted by C . It is clear that C is isomorphic with the group of all rotations of finite order of the circle, and it is the smallest group containing each $C(p^k)$ ($p=2, 3, 5, \dots; k=1, 2, \dots, \infty$) as its subgroup.

In what follows we shall need a generalization of the concept of the direct sum which coincides with the well-known concept of direct sum in case of a finite number of direct summands. Some denominations relating to this concept are taken from one of JACOBSON'S fundamentally important investigations on ring theory [2].

We shall say that the group G is a *direct sum* of its subgroups B_λ if the following requirements are fulfilled (where λ runs over an arbitrary — finite or infinite — set of indices, ordered or not):

There exist endomorphisms ε_λ of G such that

$$1) \quad \varepsilon_\lambda G = B_\lambda;$$

$$2) \quad \varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu = \begin{cases} \varepsilon_\lambda & \text{if } \lambda = \mu; \\ 0 & \text{if } \lambda \neq \mu; \end{cases}$$

$$3) \quad g \in G \text{ and } \varepsilon_\lambda g = 0 \text{ for every } \lambda \text{ imply } g = 0.$$

Among all direct sums of the groups B_λ there exists a "greatest" one, G_c , satisfying the additional requirement:

$$4) \quad \text{For any choice of a representative system of elements } b_\lambda \in B_\lambda \text{ there exists an element } g \text{ of } G_c \text{ such that } \varepsilon_\lambda g = b_\lambda \text{ holds for each } \lambda.$$

Obviously, the group G_c having the properties 1)—4) is uniquely determined (up to an isomorphism) by the groups B_λ ; we call it the *complete direct sum* of the B_λ 's, in notation:

$$(1) \quad G_c = \sum_{\lambda} B_\lambda.$$

This group may also be described as the set of all possible "vectors" \dots, b_λ, \dots which contain a "component" b_λ from each group B_λ and which are added component-wise. It is easy to see that any direct sum of the groups B_λ is a subgroup of (1).

On the other hand, among all possible direct sums of the groups B_λ there exists always a "smallest" one, denoted by G_d , which is a subgroup of any direct sum. This may be characterized as the direct sum satisfying

$$4^*) \quad \text{For any element } g \in G_d, \text{ there are only a finite number of } \lambda\text{'s with } \varepsilon_\lambda g \neq 0.$$

This group G_d , determined uniquely by the groups B_λ as the group satisfying 1), 2), 3), and 4*), is called the *discrete direct sum* of the B_λ 's and will be denoted by

$$(2) \quad G_d = \sum^*_{\lambda} B_\lambda.$$

G_d may also be described as the set of all vectors $(\dots, b_\lambda, \dots)$ having only a finite number of components different from zero. The concept of direct sum used so far in the group theory was this discrete direct sum.

In terms of the complete and discrete direct sums the direct sums of the B_λ 's may be characterized as the groups G for which $G_d \subset G \subset G_c$. For a finite number of groups B_λ always $G_d = G_c$ holds, consequently, in this case there exists only one direct sum. Therefore the concept of the direct summand in the generalized sense is the same as that in the old sense: a certain subgroup H_1 of the group H is a *direct summand* of H if there exists a group $H_2 \subseteq H$ such that $H = H_1 + H_2$.

The definition clearly implies that the complete direct sum of an enumerable infinite set of finite or countable groups has always the power of the continuum.

Let us mention an important example. It is well known that a torsion group T may be represented as the discrete direct sum of its uniquely determined primary components T_p , where T_p is a p -group (i. e. a group containing only elements of p -power order):

$$(3) \quad T = \sum_p^* T_p.$$

Therefore the complete direct sum

$$(4) \quad \bar{T} = \sum_p T_p$$

is uniquely determined by T ; it may be called the *complete p -direct sum over T* . In accordance with this, the groups between T and \bar{T} (T and \bar{T} included), in other words, the direct sums of the groups T_p , may be called the *p -direct sums over T* . It is obvious that, if the actual prime system of T contains an infinity of primes, then all of these, except T , are mixed groups and their torsion subgroup is just T .

In case $T = C$ we have obviously

$$(5) \quad C = \sum_p^* C(p^\infty)$$

where the summation is extended over all distinct prime numbers p . It is not difficult to see that the group

$$(6) \quad \bar{C} = \sum_p C(p^\infty)$$

is isomorphic with the additive group of all real numbers mod 1 (i. e. with the group of all rotations of the circle). In what follows we shall not make use of this fact.

§ 3. Lemmas

We start with some lemmas.

LEMMA 1. *If the ring of endomorphisms of a group is commutative, then every endomorphic image of the group is fully invariant.*

Indeed, if $H = \varepsilon G$ is a certain endomorphic image of G and τ_i denotes an arbitrary endomorphism of G , then by $\tau_i \varepsilon = \varepsilon \tau_i$ we have $\tau_i H = \tau_i \varepsilon G = \varepsilon \tau_i G \subseteq \varepsilon G = H$.

LEMMA 2. *If a group contains an element of order p , then it contains also a direct summand of the form $C(p^m)$ where m is a natural number or ∞ .*

For the proof we refer to [4].

LEMMA 3. *If a torsion free group H is closed for the prime p , then $H \sim C(p^\infty)$.*

Let $a \neq 0$ be an element of H . From $pH = H$ we conclude that there exist elements $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ in H such that

$$pa_1 = a, pa_2 = a_1, \dots, pa_{n+1} = a_n, \dots$$

Therefore $H[a]$ contains a subgroup $C(p^\infty)$, and since this is a direct summand of every group containing it,⁵ we obtain

$$H \sim H/[a] = C(p^\infty) + H^* \sim C(p^\infty),$$

as desired.

LEMMA 4. *Let A be the set of all elements of actually infinite height of the mixed group G . If G contains only a finite number of elements of order p for any actual prime p , then A is an actually closed subgroup of G .*

It is obvious that A is a subgroup. We have to verify that for any actual prime p_0 , $p_0 A = A$ holds, i. e. for an arbitrary $a \in A$ among the solutions of the equation $p_0 x = a$ in G there exist an element $x = g$ of infinite height for each actual prime p .

First let $p = p_0$ and d_1, \dots, d_r be the set of all elements of order p_0 in G . Since $a \in A$, the equation $p_0 x = a$ has necessarily a solution $x = x_0$ in G . Thus all the solutions of this equation are

$$(7) \quad x_0 + d_0, x_0 + d_1, \dots, x_0 + d_r \quad (d_0 = 0).$$

Let k now be an arbitrary natural integer. Since $a \in A$, the equation $p_0^k x = a$ is also solvable in G and for each solution x we have $p_0^k x = p_0 x_0$, i. e. $p_0(p_0^{k-1} x - x_0) = 0$. Hence any solution of the equation $p_0^k x = a$ satisfies the equation

$$(8) \quad p_0^{k-1} x = x_0 + d_i \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

for some i . In other words, among the indices $0, 1, \dots, r$ there is an i such that (8) has a solution for an infinity of k 's. But then the element $g = x_0 + d^i$

⁵ See [1], p. 766.

in (7) is evidently a solution of the equation $p_0x = 0$ and is of infinite height for p_0 .

Secondly let p be an actual prime for G such that $p \neq p_0$. We show that the previous solution $x = g$ of the equation $p_0x = a$ is an element of infinite height for p too. Since $a \in A$, for each natural number n there exists an element $x_1 \in G$ such that

$$(9) \quad p^n x_1 = a = p_0 g.$$

If u, v are integers with $p_0 u + p^n v = 1$, then by (9) we get

$$g = (p_0 u + p^n v)g = u p^n x_1 + v p^n g = p^n (u x_1 + v g).$$

Thus we have shown that g is an element of infinite height for p . This completes the proof of Lemma 4.

§ 4. Torsion groups

We recall that a group G is called locally cyclic if any two elements of it are contained in some cyclic subgroup of G .⁴

The torsion groups with commutative ring of endomorphisms are characterized in several ways by

THEOREM 1. *For a torsion group T the following statements are equivalent:*

- a₁) *The ring of endomorphisms of T is commutative.*
- b₁) *Every endomorphic image of T is fully invariant.*
- c₁) *T is the discrete direct sum of groups $C(p_i^{m_i})$ ($m_i = 1, 2, \dots, \infty$) belonging to different prime numbers p_i .*
- d₁) *T is a subgroup of the group C .*
- e₁) *T is locally cyclic.*
- f₁) *Any finite subgroup of T is a cyclic group.*
- g₁) *For an arbitrary natural number r the equation $rx = 0$ has at most r solutions $x \in T$.*
- h₁) *Every subgroup of T is fully invariant.*

REMARKS. According to Theorem 1 a torsion group with commutative endomorphism ring is always countable. Theorem 1 shows in particular that the necessary condition expressed in Lemma 1 is at the same time sufficient for torsion groups in order to have commutative endomorphism ring. Certain statements of Theorem 1 (for example, the equivalence of d₁) and e₁)) are well-known facts. However, we preferred to enumerate in the theorem all these interesting properties of the group C , because so the proof will be very short.

⁴ Obviously this condition is equivalent to the fact that any finite system of elements of G is contained in a cyclic subgroup of G .

PROOF OF THEOREM 1.

$a_1)$ implies $b_1)$. See Lemma 1.

$b_1)$ implies $c_1)$. T is a discrete direct sum of p -groups. If one of these primary components of T were not of type $C(p^m)$, then by repeated application of Lemma 2 we would conclude that T might be represented in the form

$$T = C(p^m) + C(p^n) + T' \quad (1 \leq m \leq \infty; 1 \leq n \leq \infty).$$

But this would imply that T has an endomorphism such that one of the subgroups $C(p^m), C(p^n)$ is mapped onto a subgroup $\neq 0$ of the other. This would contradict $b_1)$, since every direct summand is an endomorphic image.

$c_1)$ implies $d_1)$. See (5).

$d_1)$ implies $e_1)$. This is clear if one takes into account the representation of C as the additive group of all rational numbers mod 1.

$e_1)$ implies $f_1)$. This is obvious. See ⁴.

$f_1)$ implies $g_1)$. If the equation $rx = 0$ had $r+1$ solutions in T , then these would generate a finite subgroup which is not cyclic.

$g_1)$ implies $h_1)$. Obviously it is sufficient to show that, if $g_1)$ holds for T , then any cyclic subgroup of T is fully invariant. Let $a \in T$, and let ε be an arbitrary endomorphism of T . If the order of a is r , then $r \cdot \varepsilon a = 0$. On the other hand, by hypothesis, the solutions of the equation $rx = 0$ are exhausted by the elements of the cyclic group $\{a\}$. Hence $\varepsilon a \in \{a\}$.

$h_1)$ implies $a_1)$. For let $a \in T$, further ε, η denote two arbitrary endomorphisms of T . Then by $h_1)$ $\varepsilon a = ma, \eta a = na$, hence $\varepsilon \eta a = nma = mna = \eta \varepsilon a$. Therefore $\varepsilon \eta = \eta \varepsilon$.

§ 5. Mixed groups

LEMMA 5. Let G be a mixed group with the torsion subgroup T . Then each of the following three statements is a consequence of its predecessor:

a) The ring of endomorphisms of G is commutative.

b) Every endomorphic image of G is fully invariant.

c) T is a locally cyclic group without subgroups of type $C(p^\infty)$ ⁵ and the factor group G/T is closed for any prime p which is actual for G .

PROOF. By Lemma 1, a) implies b). Consequently it is sufficient to show that b) implies c).

First of all we note that by b) there exists no endomorphism ε of G in case $G = D + E, D \neq 0, E \neq 0$, for which $0 \neq \varepsilon E \subseteq D$ holds.

At first we shall show that if b) holds for G , then T is locally cyclic. Indeed, if T were not locally cyclic, then by Theorem 1 there would exist a prime number p such that T contains more than one subgroup of type $C(p)$.

⁵ This requirement can obviously be expressed also in the following manner: T is a locally cyclic group without elements of actually infinite height.

Then, by applying Lemma 2, we get

$$G = C(p''') + C(p'') + G' \quad (1 \leq m \leq \infty; 1 \leq n \leq \infty),$$

which is impossible according to our previous remark.

Now we are going to prove that G/T is closed for any actual prime number p . For let p be an arbitrary actual prime for G . Then, by Lemma 2,

$$(10) \quad G = C(p''') + G_0 \quad (1 \leq m \leq \infty).$$

If here $pG_0 = G_0$, then by $C(p''') \subset T$ we have

$$G_0 \cong G C(p''') \sim G T,$$

consequently $p(G/T) = G/T$. In the contrary case, i. e. if $pG_0 \neq G_0$, then the factor group G_0/pG_0 is an elementary p -group and hence

$$G_0 \sim G_0/pG_0 = \sum^* C(p) \sim C(p).$$

Therefore G has an endomorphism ε such that, in view of (10), $0 \neq \varepsilon G_0 \subset C(p''')$ holds, in contradiction to b).

Finally we show that the locally cyclic group T contains no subgroup of type $C(p^z)$,⁵ i. e.

$$(11) \quad T = \sum^* C(p_k^{m_k}) \quad (1 \leq m_k < \infty; p_i \neq p_j \text{ for } i \neq j).$$

In fact, assuming $C(p^\infty) \subset T$ we get

$$(12) \quad G = C(p^\infty) + G_1,$$

$C(p^\infty)$ being a direct summand of every group containing it.³ Then

$$G_1 \cong G C(p^\infty) \sim G T.$$

Further on account of what has been said above we have $p(G/T) = G/T$; therefore if we apply Lemma 3 to the group $H = G/T$, we get $G/T \sim C(p^\infty)$. Hence

$$G_1 \sim C(p^\infty)$$

which leads by (12) again to a contradiction.

From Lemma 5 thus having been proved we easily obtain the following theorems, of which Theorem 2 throws light on all mixed groups with commutative endomorphism ring and without elements of actually infinite height, while Theorem 3 characterizes the mixed groups with commutative endomorphism ring in which T is a direct summand.

THEOREM 2. *For a mixed group G without elements of actually infinite height the following statements are equivalent:*

- a₂) *The ring of endomorphisms of G is commutative.*
- b₂) *Every endomorphic image of G is fully invariant.*
- c₂) *The torsion subgroup T of G is locally cyclic and contains no subgroup of type $C(p^\infty)$; further G is a p -direct sum over T such that G/T is closed for each actual prime.*

REMARKS. First of all we note that there exist in fact groups G described in c₂) of Theorem 2 and we can get an oversight on them. Indeed, the complete p -direct sum over the group (11), i. e. the group

$$(13) \quad \bar{T} = \sum C(p_k^{m_k}) \quad (1 \leq m_k < \infty; p_i \neq p_j \text{ for } i \neq j)$$

has the property that T/T is closed for any prime number p . To prove this we must show that if the "vector" $c = \dots, c_k, \dots$ ($c_k \in C(p_k^{m_k})$) is an arbitrary element of the group (13) and p is an arbitrary prime number, then there exists an $x \in \bar{T}$ such that $c - px \in T$. This is obvious, since one may plainly construct a "vector" x with $c - px = 0$ or $c - px \in C(p_j^{m_j})$, according as $p \neq p_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) or $p = p_j$. Hence the group (13) corresponding to any prescribed group (11) has always commutative endomorphism ring, and according to Theorem 2 all mixed groups of this property without elements of actually infinite height are exhausted by those groups G for which $T \subset G \subset \bar{T}$ and $p_k(G/T) = G/T$ for every k . For a given T the determination of all G 's of this kind is naturally equivalent to giving all those subgroups of the factorgroup \bar{T}/T which are closed for every p_k . Since the group T/T is torsion free, this process becomes easier by taking into account that if S is an arbitrary subgroup of T/T and if we adjoin to S all those elements e of T/T for which $re \in S$ with some natural number r divisible only by primes in (11), then we get a subgroup S_0 of \bar{T}/T such that $p_k S_0 = S_0$ for every k .

The results below will show that in a group G characterized by Theorem 2 the torsion subgroup T is never a direct summand.

Theorem 2 implies the existence of mixed groups of the power of the continuum with commutative ring of endomorphisms. We have to point out the fact that the necessary condition of Lemma 1 also suffices for mixed groups without elements of actually infinite height in order to have commutative endomorphism ring.

PROOF OF THEOREM 2.

In view of Lemma 5 it is sufficient to show that, if G is a mixed group without elements of actually infinite height, then c) of Lemma 5 implies c₂); further if G is an arbitrary mixed group, then c₂) implies a₂) besides the fact that G is a group without elements of actually infinite height.

Now we consider the first assertion. According to c), T is a group of the form (11). First of all we show that in (11) there is an infinity of primes p_k . In the contrary case, by a repeated application of Lemma 2, we would have $G = T + U$, and here, by c) and $U \sim G/T$, the torsion free group U would be an actually closed subgroup of G . This is, however, impossible, since by hypothesis G contains no element $\neq 0$ of actually infinite height. (In the same way we can prove on basis of Theorem 2 that T is never a direct summand of the groups G described by Theorem 2.)

Now let p_k be an arbitrary actual prime number for G . Then by Lemma 2

$$(14) \quad G = C(p_k^{m_k}) + G_k \quad (1 \leq m_k < \infty)$$

where $C(p_k^{m_k})$ is the same direct summand as that occurring in (11). As a matter of fact, since the group $C(p_k^{m_k})$ in (11) includes all those elements of G whose order is some power of p_k , obviously G has no other direct summand of type $C(p_k^m)$. Thus in the representation (14) of G the direct summand $C(p_k^{m_k})$ is uniquely determined. On the other hand we show that also G_k is uniquely determined as the set of all elements of infinite height for p_k in G . A part of this assertion, viz. that $g \in G$ and $g \notin G_k$ imply that g is not of infinite height for p_k , is obvious. Consequently, it is enough to show that if $g_k \in G_k$, then the equation $p_k x = g_k$ has always a solution $x \in G_k$. Since by c) GT is closed for p_k , there exists an $x \in G$ such that $p_k x = g_k$, $d \in T$. Let $C(p_k^{m_k}) = \{c_k\}$ and let the elements x and d be represented in the form according to (14)

$$x = ic_k + g'_k, \quad d = jc_k + g''_k \quad (g'_k, g''_k \in G_k).$$

Here g''_k being an element of finite order in G_k , the order of g''_k is not divisible by p_k . Therefore $g''_k = p_k g'''_k$ ($g'''_k \in G_k$). Hence the equation $p_k x = g_k$ can be written in the form

$$p_k(ic_k + g'_k) - g_k = jc_k + p_k g'''_k,$$

whence we get $p_k(g'_k - g'''_k) = g_k$ on account of the direct representation in (14). Consequently the element $g'_k - g'''_k$ is, indeed, a solution in G_k of the equation $p_k x = g_k$.

By the uniqueness, thus proved, of both terms on the right hand of (14), we conclude that each element g of G may be written in exactly one way as the sum of an element $\varepsilon_k g$ in $C(p_k^{m_k})$ and of an element in G_k . It is clear that the mapping $g \rightarrow \varepsilon_k g$ is an endomorphism of G . The endomorphisms thus defined possess obviously the following properties:

$$1) \quad \varepsilon_k G = C(p_k^{m_k});$$

$$2) \quad \varepsilon_i \varepsilon_k = \begin{cases} \varepsilon_k & \text{if } i = k; \\ 0 & \text{if } i \neq k; \end{cases}$$

$$3) \quad \text{If } g \in G \text{ and } \varepsilon_k g = 0 \text{ for every } k, \text{ then } g = 0.$$

Indeed, 3) is a consequence of the fact that if $\varepsilon_k g = 0$ for every k , then $g \in G_k$ for every k , i. e. g is an element of infinite height for each p_k , so that, by hypothesis, $g = 0$. Thus we have shown that G is a p -direct sum over T in the sense of § 2.

In order to complete the proof of Theorem 2 we have only to show that if c_2) holds for the mixed group G , then G contains no element of actually infinite height and the endomorphism ring of G is commutative. The previous part follows from that by (13)

$$p_1^{m_1} T \cap p_2^{m_2} T \cap \dots \cap p_k^{m_k} T \cap \dots = 0,$$

and hence a fortiori for $G \subseteq T$

$$p_1^{m_1} G \cap \dots \cap p_k^{m_k} G \cap \dots = 0.$$

Now let ε and η be any two endomorphisms of G and let us consider the endomorphism $\delta = \varepsilon\eta - \eta\varepsilon$. Since any endomorphism of G induces an endomorphism in T and since, by c_2) and Theorem 1, the endomorphism ring of T is commutative, we obtain $\delta T = 0$. Therefore T is contained in the kernel K of the endomorphism δ . But then, by $G/T \sim G/K \sim \delta G$ and by the fact that $p_k(G/T) = G/T$ for every k , δG is an actually closed subgroup of G . Hence $\delta G = 0$. Thus we have shown that $\delta = \varepsilon\eta - \eta\varepsilon = 0$, and this completes the proof of Theorem 2.

THEOREM 3. *Suppose the mixed group G can be represented as $G = T \perp U$, where T is the torsion subgroup of G . Then the endomorphism ring of G is commutative if and only if T is a locally cyclic group containing no subgroup of type $C(p^2)$ and U is an actually closed subgroup of G with commutative endomorphism ring.*

REMARKS. It is clear that in the groups described by Theorem 3 the set of all elements of actually infinite height is just the subgroup U . Hence Theorem 2 and Theorem 3 exhaust two classes of mixed groups which have no groups in common, since Theorem 2 concerns groups without elements of actually infinite height.

It is easy to give examples for groups satisfying the conditions of Theorem 2. An instance for a group of this kind is the direct sum of a group T of the form (11) and the group $U = R$. We shall show in § 6 that also among the groups described by Theorem 3 exist groups of the power of the continuum.

We may expect to obtain further informations of the structure of the groups given by Theorem 3 only in case one would succeed in getting some further details of the structure of torsion free groups with commutative endomorphism ring. Only in this case one can answer the question whether or not the groups satisfying the conditions of Theorem 3 are all the mixed groups whose torsion group is a direct summand and which satisfy the necessary condition of Lemma 1.

PROOF OF THEOREM 3.

The necessity of the conditions of Theorem 3 follows obviously from Lemma 5, as well as from the fact that if $G = T \perp U$, then $U \sim G/T$ and the commutativity of the endomorphism ring of G implies the same for U .

In order to prove the sufficiency of the conditions, let us consider a group $G = T \perp U$ satisfying the hypotheses of Theorem 3. It is obvious that both T and U are fully invariant subgroups of G (the latter being the set of all elements of actually infinite height of G). Consequently any endomorphism of G induces an endomorphism both in T and U . On the other hand, as the

endomorphism ring both of T (see Theorem 1) and of U is commutative, T and U are contained in the kernel of the endomorphism $\varepsilon\eta - \eta\varepsilon$ for any two endomorphism ε, η of G . Then the kernel of $\varepsilon\eta - \eta\varepsilon$ contains also $T + U = G$, i. e. $\varepsilon\eta - \eta\varepsilon = 0$.

Now the question arises as to whether the groups given by Theorems 2 and 3 exhaust all mixed groups with commutative endomorphism ring. We have to answer this question in the negative. More exactly:

If the actual prime system of the mixed group G with commutative endomorphism ring contains all the prime numbers, then G is covered by Theorem 2. If the actual prime system of G consists only of a finite number of primes, then G is covered by Theorem 3. In all other cases — i. e. when the actual prime system of G contains infinitely many prime numbers, but not all of them — there is a group G with commutative endomorphism ring which is not covered neither by Theorem 2, nor by Theorem 3.

In order to prove this, let G be a mixed group with commutative endomorphism ring, and first let us consider the case when the actual prime system of G consists of all primes. Then by Lemmas 5 and 4 all elements of actually infinite height of G form a torsion free subgroup A closed for every prime. Therefore, according to a well-known theorem³ A is a direct summand of G :

$$(15) \quad G = G_0 + A$$

where G_0 is already a group without elements of actually infinite height, i. e. G_0 is covered by Theorem 2. But by Theorem 2, $G_0 T$ is a torsion free group closed for every prime and thus, it is a discrete direct sum of rational groups R . Hence $G_0 \sim G_0 T \sim R$. On the other hand, $A \neq 0$ would imply $R \subset A$. Thus, by (15) one might find an endomorphism ε of G such that $0 \neq \varepsilon(G_0) \subset A$ contradicting Lemma 1. Therefore only $A = 0$ is possible, completing the proof that in this case G is covered by Theorem 2.

Let us proceed to the case if the actual prime system of G contains but a finite number of primes. Then by Lemma 5, T is a finite cyclic group and a repeated application of Lemma 2 leads to the representation $G = T + U$ which shows that now G is covered by Theorem 3.

Finally let us consider the case when the actual prime system of G contains an infinity of prime numbers p_1, p_2, \dots , but not all of them. Let q be a prime not actual for G and denote by R_q the additive group of all rational numbers whose denominator is relatively prime to q . Then

$$(16) \quad G = R_q + \sum_k C(p_k)$$

is a mixed group covered neither by Theorem 2, nor by Theorem 3, considering that the set of elements of actually infinite height of it is R_q , further neither $R_q = 0$ nor $G = R_q + T$ holds. That the endomorphism ring of the group (16) is commutative, we shall show below. (See Theorem 5.)

It is worth while having a look at the consequences of our results in the most general case. We get a necessary condition as well as a sufficient one for the endomorphism ring of a mixed group G to be commutative. The previous condition is contained in Theorem 4 and is an immediate consequence of Lemmas 4 and 5 as well as of the first part of the proof of Theorem 2.

THEOREM 4. *If the endomorphism ring of a mixed group G is commutative, then the torsion subgroup T of G is a group of type (11), GT is closed for every actual prime number, the elements of actually infinite height of G form an actually closed torsion free subgroup A of G and GA is a group without elements of actually infinite height with commutative endomorphism ring (consequently, it is a group of the type given by Theorem 2).*

The following example shows that the conditions of Theorem 4 are not always sufficient for ensuring the commutativity of the endomorphism ring:

$$G = R + \sum_p C(p).$$

The complete direct sum on the right side is to be extended over all distinct prime numbers p . By $\sum_p C(p) \sim R$, G does not fulfil the requirement of

Lemma 1, so that the endomorphism ring of G is not commutative.

A sufficient condition is given by the following

THEOREM 5. *If a mixed group G satisfying the conditions of Theorem 4 has the property that there exists a prime number q such that $q(GA) = GA$, further A contains no element ($\neq 0$) of infinite height for q ,⁶ and the endomorphism ring of A is commutative, then the endomorphism ring of G is commutative.*

PROOF. Obviously T and A are fully invariant subgroups of G . Hence any endomorphism of G induces an endomorphism both in T and in A . But the endomorphism ring of T and that of A are commutative, so that T and A are both contained in the kernel K of the endomorphism $\delta = \varepsilon\eta - \eta\varepsilon$ for any two endomorphisms ε and η . Therefore

$$(17) \quad G/T \sim G/K \cong \delta G$$

and

$$(18) \quad G/A \sim G/K \cong \delta G.$$

Since G/T is closed for every actual prime, (17) means that δG is an actually closed subgroup of G , i. e. $\delta G \subseteq A$. On the other hand, from $q(GA) = GA$ and from (18) we may conclude that $q(\delta G) = \delta G$. However, the only subgroup of A closed for q is 0, hence $\delta G = 0$ and $\delta = \varepsilon\eta - \eta\varepsilon = 0$.

The group G in (16) satisfies obviously the conditions of Theorem 5, so that its endomorphism ring is commutative.

⁶ Consequently q cannot be an actual prime for G .

§ 6. Final remarks and some conjectures

In order to construct groups of the power of the continuum with commutative endomorphism ring we need the following

THEOREM 6. *If H_1, H_2, \dots are countably many groups such that*

(I) *The endomorphism ring of H_n is commutative ($n = 1, 2, \dots$),*

(II) *H_n is a fully invariant subgroup of the complete direct sum $G = \sum H_n$,*

(III) *The only homomorphic image of $\sum H_n \sum^* H_n$ in G is 0,*

then the endomorphism ring of $G = \sum H_n$ is commutative.

PROOF. Let ε, τ_i be arbitrary endomorphisms of G . By (II) and (I), each H_n , and hence also $\sum^* H_n$ is contained in the kernel of the endomorphism $\delta = \varepsilon\tau_i - \tau_i\varepsilon$. Therefore

$$\sum H_n \sum^* H_n \sim \delta G \subset G.$$

By (III) we have $\delta G = 0$, consequently $\varepsilon\tau_i - \tau_i\varepsilon = 0$.

Using Theorem 6 one can easily construct a torsion free group of the power of the continuum with commutative endomorphism ring. In order to do this, let p_1, p_2, \dots be an infinity of distinct prime numbers and denote again by R_{p_n} the additive group of all rational numbers whose denominator is relatively prime to p_n . Then the complete direct sum $G = \sum R_{p_n}$ is a group having the required property. (II) is fulfilled, since R_{p_n} contains all the elements of G which are of infinite height for each prime $\neq p_n$. (III) also holds, for $G \sum^* R_{p_n}$ is now a group closed for every prime number p_n , while the only subgroup of G with the same property is obviously 0.

If q is a prime number different from each prime number p_n , then

$$C(q) + \sum_n R_{p_n}$$

is obviously a group satisfying the conditions of Theorem 3. Thus we have shown that among the groups covered by Theorem 3 there exist groups of the power of the continuum.

In conclusion we formulate some conjectures.

CONJECTURE 1. *If every endomorphic image of a group is fully invariant, then the endomorphism ring of the group is commutative.*

CONJECTURE 2. *Every group with commutative endomorphism ring is at most of the power of the continuum.*

If Conjecture 2 will prove to be true, then on basis of Lemma 5 it is easy to show that even the following conjecture will hold:

CONJECTURE 3. *Any group with commutative endomorphism ring is isomorphic with a subgroup of the group of all rotations of the circle.*

(Received 13 December 1951)

Bibliography

- [1] R. BAER, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Ann. of Math.*, Princeton, (2), **37** (1936), pp. 766—781.
- [2] N. JACOBSON, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, **67** (1945), pp. 300—320.
- [3] T. SZELE, Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring, *Publ. Math. (Debrecen)*, **1** (1949), pp. 89—91.
- [4] T. SZELE, Sur la décomposition des groupes abéliens, *Comptes Rendus (Paris)*, **229** (1949), pp. 1052—1053.

О ГРУППАХ АБЕЛЯ, КОЛЬЦО ЭНДОМОРФИЗМА КОТОРЫХ КОММУТАТИВНО

Т. СЕЛЕ (Дебрецен) и Я. СЕНДРЕИ (Сегед)

(Резюме)

В настоящей работе авторы изучают такие группы Абеля, кольцо эндоморфизма которых коммутативно. Доказывают, что торзигруппа тогда и только тогда обладает этим свойством, если локально циклическа, т.е. изоморфна какой-нибудь подгруппе группы, состоящей из вращений окружности конечной степени. После этого они переходят к исследованию смешанных групп, обладающих указанным свойством. Среди этих групп удаётся описать группы, которые могут быть представлены в виде прямой суммы группы с торзией и группы без торзии и группы, не содержащей такого отличного от нуля элемента, который бесконечно высок относительно любого такого простого числа, который является порядком какого-либо элемента группы. Во втором случае используют некоторое обобщение понятия прямой суммы. Из результатов следует, что существует смешанная группа, мощность которой есть мощность континуума, обладающая вышеуказанным свойством.

Авторам удаётся построить и группу без торзии, мощность которой есть мощность континуума, обладающую этим свойством. В заключении они выдвигают гипотезу, согласно которой мощность группы, обладающей вышеуказанным свойством, не может быть более мощности континуума. Эта гипотеза может быть сформулирована и так: любая группа, обладающая этим свойством, изоморфна какой-то подгруппе группы, состоящей из всех вращений окружности.

CONTRIBUTIONS TO THE REDUCTION THEORY OF THE DECISION PROBLEM

Fifth paper Ackermann prefix with three universal quantifiers

By
JÁNOS SURÁNYI (Budapest)
(Presented by L. KALMÁR)

1. In the second paper under the above main title,¹ I proved a theorem on the reduction of the decision problem of the first order predicate calculus, which is a common improvement of two reduction theorems, due to GÖDEL² and PEPIS,³ respectively. Indeed, by the reduction theorems of GÖDEL and PEPIS, the decision problem is equivalent to the satisfiability question for first order formulas with a prefix⁴ of the form

$$(1) \quad (x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1) \dots (Ey_n)$$

and to the same question for first order formulas with a prefix of the form

$$(2) \quad (x_1) \dots (x_m)(Ey)$$

(or, if we will, of the form

$$(2') \quad (x_1)(x_2)(Ey)(x_3) \dots (x_m))$$

respectively, whereas in the paper quoted above, I have proved that we can take $n = 1$ in (1) and $m = 3$ in (2) (or in (2')), i. e. that the decision problem is equivalent to the satisfiability question for first order formulas with a prefix of the form

$$(3) \quad (x_1)(x_2)(x_3)(Ey)$$

¹ JÁNOS SURÁNYI, Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper, Three universal, one existential quantifiers, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), pp. 261—270. We shall quote this paper as "second paper".

² K. GÖDEL, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **40** (1933), pp. 433—443.

³ J. PEPIS, Ein Verfahren der mathematischen Logik, *Journal of Symbolic Logic*, **3** (1938), pp. 61—76 and Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Fundamenta Math.*, **30** (1938), pp. 257—348.

⁴ A formula whose prefix is mentioned in this paper is always meant to be prenex.

(or, if we will, of the form

$$(3') \quad (x_1)(x_2)(Ey)(x_3))$$

containing but four quantifiers in all. Hence the question arises whether or not other theorems concerning the reduction of the decision problem can be improved in like manner, i. e., by specifying the number of the quantifiers.

In the present paper I shall answer affirmatively this question concerning the reduction theorem of ACKERMANN,⁵ stating that the decision problem is equivalent to the satisfiability question for first order formulas with a prefix of the form

$$(4) \quad (Ex_1)(y_1)(Ex_2)(y_2) \dots (y_n).$$

Indeed, I shall prove that we can take $n = 3$ in (4). The method to be applied permits to specify the number of binary relations too, so that the number of unary predicates will remain as the only parameter of the formulas. Moreover I shall prove the

THEOREM. ⁶ *To any given first order formula it is possible to construct an equivalent⁷ binary first order formula having a prefix of the form*

$$(5) \quad (Ex_1)(y_1)(Ex_2)(y_2)(y_3)$$

and also another one having a prefix of the form

$$(5') \quad (y_1)(Ex_1)(Ex_2)(y_2)(y_3)$$

and containing at most seven binary predicates.

Combined with the theorem of CHURCH⁸ stating the recursive unsolvability of the decision problem, this theorem shows that the satisfiability question for binary formulas with a prefix of the form (5) (or (5')) cannot be solved by any (general) recursive process. This may be considered as an improvement of a theorem of TURING⁹ stating the recursive unsolvability of the satisfiability question for binary formulas with a prefix of the form

$$(Ex_1)(y_1)(Ex_2)(y_2) \dots (y_6).$$

⁵ WILHELM ACKERMANN, Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, **112** (1936), pp. 419—432.

⁶ This result, with a sketch of its proof, is contained in the following paper: JÁNOS SURÁNYI, Reduction of the decision problem to formulas containing a bounded number of quantifiers only, *Proc. of the Xth International Congr. of Philosophy* (Amsterdam 1948), fasc. II., pp. 759—762.

⁷ Two first order formulas are called equivalent if the satisfiability of one of them implies that of the other, and conversely.

⁸ ALONZO CHURCH, A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), pp. 40—41, 101—102. See also footnote⁸ in the second paper.

⁹ A. M. TURING, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings London Math. Society*, **42** (1937), pp. 230—265, especially pp. 259—263.

2. The main idea of the proof is the same as that of the proof of ACKERMANN'S theorem, viz. the well-known fact¹⁰ that if a given first order formula **A** can be satisfied at all, it can be satisfied on the set of all positive integers. Moreover, for the descriptive functions corresponding to the existential quantifiers in **A** we can choose arbitrary arithmetic functions subject to the sole conditions that each positive integer has to be assumed at most by one of these functions and at most for one sequence of arguments, each of which is less than the value itself. Suppose that **A** has a prefix of the form (3) (which we can do, by the theorem of the second paper, without loss of generality). In this case we shall need a single, ternary descriptive function, for which we shall take the function $\omega(x_1, x_2, x_3) + 1$, where $\omega(i, j, k)$ denotes the ordinal number of the triad¹¹ (i, j, k) in the Cauchy enumeration of all triads (defined exactly later on):

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 2, 2), \\ (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1), (1, 1, 4), \dots$$

We construct a formula **B**, symbolizing the fact that **A** can be satisfied in the indicated way, and therefore equivalent to **A**. Of course, **B** has to contain a definition of the arithmetical function $\omega(i, j, k)$, or, instead of this a definition of its "inverses", i. e., of the solutions $i = \chi_1(n), j = \chi_2(n), k = \chi_3(n)$ of the equation $\omega(i, j, k) = n$. We choose the second possibility, because the recursive definition of χ_1, χ_2 and χ_3 can be symbolized by means of three universal quantifiers, while that of ω would require six. The only existential quantifiers which enter in **B** are those expressing the existence of 1 and, to each integer, that of its successor, both playing a special role in the recursive definitions. From **B**, we go over to a formula **C** with a prefix of the form (5') by interchanging the quantifier expressing the existence of 1 with the first universal quantifier. The independence from the variable of that universal quantifier of the individual whose existence is thus postulated, will be secured by an extra unicity postulate.¹²

3. The enumerating function $\omega(i, j, k)$ as well as its inverses $\chi_1(n), \chi_2(n), \chi_3(n)$ will be defined recursively by the equations

$$\begin{aligned} \omega(1, 1, 1) &= 1, \\ \omega(1, 1, k+1) &= \omega(k, 1, 1) + 1, \\ \omega(i+1, 1, k) &= \omega(i, k+1, 1) + 1, \\ \omega(i, j+1, k) &= \omega(i, j, k+1) + 1, \end{aligned}$$

¹⁰ Cf. TH. SKOLEM, Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter utgitt av det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, Mat-naturw. Klasse*, 1929, no 4, pp. 1—49, especially pp. 23—29 and D. HILBERT and P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 2 (Berlin 1939), p. 174, rule 3*.

¹¹ Triad means ordered triad; i, j, k, n denote throughout positive integers.

¹² This idea was used at the first time by LÁSZLÓ KÁLMÁR and JÁNOS SURÁNYI, On the reduction of the decision problem, second paper, Gödel prefix, a single binary predicate, *Journal of Symbolic Logic*, 12 (1947), pp. 65—73.

and

$$(6) \quad \chi_1(1) = \chi_2(1) = \chi_3(1) = 1,$$

$$(7) \quad \chi_1(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{for } \chi_2(n) = \chi_3(n) = 1, \\ \chi_1(n) + 1 & \text{for } \chi_2(n) \neq 1, \chi_3(n) = 1, \\ \chi_1(n) & \text{for } \chi_3(n) \neq 1, \end{cases}$$

$$(8) \quad \chi_2(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{for } \chi_3(n) = 1, \\ \chi_2(n) + 1 & \text{for } \chi_3(n) \neq 1, \end{cases}$$

$$(9) \quad \chi_3(n+1) = \begin{cases} \chi_1(n) + 1 & \text{for } \chi_2(n) = \chi_3(n) = 1, \\ \chi_2(n) - 1 & \text{for } \chi_2(n) \neq 1, \chi_3(n) = 1, \\ \chi_3(n) - 1 & \text{for } \chi_3(n) \neq 1. \end{cases}$$

$$(10) \quad \chi_3(n+1) = \begin{cases} \chi_1(n) + 1 & \text{for } \chi_2(n) = \chi_3(n) = 1, \\ \chi_2(n) - 1 & \text{for } \chi_2(n) \neq 1, \chi_3(n) = 1, \\ \chi_3(n) - 1 & \text{for } \chi_3(n) \neq 1. \end{cases}$$

$$(11) \quad \chi_3(n+1) = \begin{cases} \chi_1(n) + 1 & \text{for } \chi_2(n) = \chi_3(n) = 1, \\ \chi_2(n) - 1 & \text{for } \chi_2(n) \neq 1, \chi_3(n) = 1, \\ \chi_3(n) - 1 & \text{for } \chi_3(n) \neq 1. \end{cases}$$

$$(12) \quad \chi_3(n+1) = \begin{cases} \chi_1(n) + 1 & \text{for } \chi_2(n) = \chi_3(n) = 1, \\ \chi_2(n) - 1 & \text{for } \chi_2(n) \neq 1, \chi_3(n) = 1, \\ \chi_3(n) - 1 & \text{for } \chi_3(n) \neq 1. \end{cases}$$

We shall verify that they are formulated correctly by proving the

LEMMA 1. We have¹³

$$\omega(i, j, k) = n$$

if and only if $i = \chi_1(n)$, $j = \chi_2(n)$, $k = \chi_3(n)$.

PROOF. We have

$$\omega(\chi_1(1), \chi_2(1), \chi_3(1)) = \omega(1, 1, 1) = 1.$$

Suppose $\omega(\chi_1(n), \chi_2(n), \chi_3(n)) = n$ for some n ; then (i) in case $\chi_2(n) = \chi_3(n) = 1$ we have

$$\begin{aligned} \omega(\chi_1(n+1), \chi_2(n+1), \chi_3(n+1)) &= \omega(1, 1, \chi_1(n) + 1) = \\ &= \omega(\chi_1(n), 1, 1) + 1 = \omega(\chi_1(n), \chi_2(n), \chi_3(n)) + 1 = n + 1; \end{aligned}$$

(ii) in case $\chi_2(n) \neq 1, \chi_3(n) = 1$ we have

$$\begin{aligned} \omega(\chi_1(n+1), \chi_2(n+1), \chi_3(n+1)) &= \omega(\chi_1(n) + 1, 1, \chi_2(n) - 1) = \\ &= \omega(\chi_1(n), \chi_2(n), 1) + 1 = \omega(\chi_1(n), \chi_2(n), \chi_3(n)) + 1 = n + 1; \end{aligned}$$

and (iii) in case $\chi_3(n) \neq 1$ we have

$$\begin{aligned} \omega(\chi_1(n+1), \chi_2(n+1), \chi_3(n+1)) &= \omega(\chi_1(n), \chi_2(n) + 1, \chi_3(n) - 1) = \\ &= \omega(\chi_1(n), \chi_2(n), \chi_3(n)) + 1 = n + 1. \end{aligned}$$

Therefore $\omega(\chi_1(n), \chi_2(n), \chi_3(n)) = n$ holds for $n = 1, 2, \dots$

We have obviously $\omega(i, j, k) > 0$ for all positive integers i, j, k . Therefore, by the definition of ω , $\omega(i, j, k) > 1$ except $i = j = k = 1$; i. e. $\omega(i, j, k) = 1$ implies $i = 1 = \chi_1(1)$, $j = 1 = \chi_2(1)$ and $k = 1 = \chi_3(1)$. Suppose that $\omega(i, j, k) = n$ implies $i = \chi_1(n)$, $j = \chi_2(n)$, $k = \chi_3(n)$ for some n , further assume $\omega(i, j, k) = n + 1$. As $i = j = k = 1$ is impossible, we have either $i = j = 1$, $k \neq 1$, or $i \neq 1$, $j = 1$, or else $j \neq 1$. In the first case we have

$$n + 1 = \omega(i, j, k) = \omega(1, 1, k) = \omega(k - 1, 1, 1) + 1,$$

hence

$$\omega(k - 1, 1, 1) = n, \quad k - 1 = \chi_1(n), \quad 1 = \chi_2(n) = \chi_3(n),$$

¹³ Lemma 1 shows that the function $\omega(i, j, k) = n$ furnishes a one-to-one correspondence between the triads (i, j, k) and the positive integers n .

and therefore

$$i=1=\chi_1(n+1), \quad j=1=\chi_2(n+1), \quad k=\chi_1(n)+1=\chi_3(n+1).$$

In the second case we have

$$n+1=\omega(i, j, k)=\omega(i, 1, k)=\omega(i-1, k+1, 1)+1,$$

hence

$$\omega(i-1, k+1, 1)=n, \quad i-1=\chi_1(n), \quad k+1=\chi_2(n), \quad 1=\chi_3(n),$$

consequently $\chi_2(n) \neq 1$ and

$$i=\chi_1(n)+1=\chi_1(n+1), \quad j=1=\chi_2(n+1), \quad k=\chi_2(n)-1=\chi_3(n+1).$$

In the third case we have

$$n+1=\omega(i, j, k)=\omega(i, j-1, k+1)+1,$$

hence

$$\omega(i, j-1, k+1)=n, \quad i=\chi_1(n), \quad j-1=\chi_2(n), \quad k+1=\chi_3(n).$$

Thus $\chi_3(n) \neq 1$ and

$$i=\chi_1(n)-1=\chi_1(n+1), \quad j=\chi_2(n)+1=\chi_2(n+1), \quad k=\chi_3(n)-1=\chi_3(n+1).$$

Therefore $\omega(i, j, k)=n$ implies $i=\chi_1(n), j=\chi_2(n), k=\chi_3(n)$ for $n=1, 2, \dots$

4. In order to prove our theorem, by the theorem of the second paper it suffices to construct to any binary first order formula **A** with a prefix of the form (3) an equivalent binary first order formula **B** having a prefix of the form (5). Let

$$\mathbf{A} = (x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\mathbf{M}$$

where the matrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(F_1, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$$

is a truth function of the $16l$ arguments¹⁴

$$F_\lambda(x_\mu, x_\nu), \quad \lambda = 1, \dots, l; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Suppose first that **A** can be satisfied. Then (compare¹⁰) it is possible to define predicates Φ_1, \dots, Φ_l over the set J of the positive integers such that

$$\mathbf{M}(\Phi_1, \dots, \Phi_l; x_1, x_2, x_3; \omega(x_1, x_2, x_3)+1)$$

is true for arbitrary positive integers x_1, x_2, x_3 ; i. e.

$$(15) \quad \mathbf{M}(\Phi_1, \dots, \Phi_l; \chi_1(x), \chi_2(x), \chi_3(x), x+1)$$

holds for arbitrary $x \in J$. For the sake of uniform notation, let $\chi_4(x) = x+1$ and let

$$\Psi_{\lambda\mu\nu}(x) = \Phi_\lambda(\chi_\mu(x), \chi_\nu(x)) \quad \text{for } \lambda = 1, \dots, l; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

¹⁴ We may suppose without loss of generality, that **A** does not contain unary predicate variables. Indeed, if we attach to each unary predicate variable F occurring in **A** a binary one, say, F^* , different from the binary predicate variables occurring originally in **A** and from the binary predicate variables attached to the other unary ones occurring in **A**, and replacing each part of the form $F(x)$ of **A** by $F^*(x, x)$, then we get a formula which is plainly equivalent to **A**.

Let us now denote by $\mathbf{M}^*(G_{111}, G_{112}, \dots, G_{l44}; x)$ the matrix resulting from $\mathbf{M}(F_1, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$ by replacing $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$ by $G_{\lambda\mu\nu}(x)$ for $\lambda = 1, \dots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Then we can write (15) in the form

$$(16) \quad \mathbf{M}^*(\Psi_{111}, \Psi_{112}, \dots, \Psi_{l44}; x).$$

Define the binary predicate $X_\mu(x, y)$ to hold if and only if $y = \chi_\mu(x)$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$); in particular we have

$$(17) \quad X_4(x, x+1)$$

for arbitrary $x \in J$. We have ⁵

$$(18) \quad X_1(1, 1)X_2(1, 1)X_3(1, 1)$$

by (6); further, for arbitrary $x, y, z \in J$,

$$(19) \quad X_1(x, y)X_2(x, 1)X_3(x, 1)X_4(y, z) \rightarrow X_1(x+1, 1)X_2(x+1, 1)X_3(x+1, z)$$

by (7), (10) and (12);

$$(20) \quad X_1(x, y)\bar{X}_2(x, 1)X_3(x, 1)X_4(y, z) \rightarrow X_1(x+1, z)X_2(x+1, 1)$$

by (8) and (10);

$$(21) \quad X_2(x, y)X_3(x, 1)X_4(z, y) \rightarrow X_2(x, 1)X_3(x+1, z)$$

by $\chi_2(x) = y = z + 1 \neq 1$ and (13);

$$(22) \quad X_1(x, y)\bar{X}_3(x, 1) \rightarrow X_1(x+1, y)$$

by (9);

$$(23) \quad X_2(x, y)X_3(x, 1)X_4(y, z) \rightarrow X_2(x+1, z)$$

by (11); finally

$$(24) \quad X_3(x, y)X_4(z, y) \rightarrow \bar{X}_3(x, 1)X_3(x+1, z)$$

by $\chi_3(x) = y = z + 1 \neq 1$ and (14). By (18)–(24), the recursion equations (6)–(14) defining χ_1, χ_2 and χ_3 have been completely formalized. We could formalize the construction of the predicates $\Psi_{\lambda\mu\nu}$ out of the original predicates Φ_λ simply by the formulas

$$X_\mu(x, y)X_\nu(x, z) \rightarrow (\Psi_{\lambda\mu\nu}(x) \sim \Phi_\lambda(y, z)) \\ (\lambda = 1, \dots, l; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

however, in order to dispense with the binary predicates¹⁶ Φ_λ in the new formula, we can replace Φ_λ by $\Psi_{\lambda 1 2}$ say. For this purpose (to avoid the increase of the number of the universal quantifiers) we need predicates $\Lambda_\mu(x, y)$ defined to hold if and only if $\chi_\mu(x) = \chi_1(y)$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Of course, we can replace $\Lambda_1(x, y)$ by $X_1(y, x+1)$; however, for the sake of uniformity we shall retain $\Lambda_1(x, y)$ as an alternative notation. By means of these predicates,

¹⁵ For simplicity we omit conjunction signs (except at the end of a line when dividing formulas).

¹⁶ Of course, the number l of the Φ_λ 's is not fixed.

the construction of the predicates ψ can be formalized as follows:

$$(25) \quad \Lambda_\mu(x, y) X_\nu(x, z) X_2(y, z) \rightarrow (\psi_{\lambda\mu\nu}(x) \sim \psi_{\lambda 12}(y))$$

for $\lambda = 1, \dots, l; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. The connection between the predicates Λ and the predicates X can be expressed thus:

$$(26) \quad X_\mu(x, z) X_1(y, z) \rightarrow \Lambda_\mu(x, y) \quad \text{for } \mu = 1, 2, 3.$$

By (6), (7), (8) and (9) we have $\chi_1(2) = 1 < 2$ and $\chi_1(n+1) \leq \chi_1(n) + 1$ for $n = 2, 3, \dots$; hence by induction, $\chi_1(n) < n$ except $n = 1$. Consequently, $X_1(y, y)$ holds for $y = 1$ only, and therefore, for arbitrary $y, z \in J$ we have

$$(27) \quad Y_1(y, y) \rightarrow (X_1(z, y) \sim X_1(z, 1)) (X_2(z, y) \sim X_2(z, 1)) (X_3(z, y) \sim X_3(z, 1)).$$

Now let us form the conjunction of (16)–(26) on the one hand and that of (16)–(27) on the other hand. Let us replace 1 and $x+1$ by individual variables u and v , further the predicates $\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{l44}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, by predicate variables $G_{111}, G_{112}, \dots, G_{l44}, H_1, H_2, H_3, H_4, L_1, L_2, L_3$ respectively. Thus we get the matrices¹⁷

$$(28) \quad \begin{aligned} \mathbf{N} = & \mathbf{N}(G_{111}, G_{112}, \dots, G_{l44}, H_1, H_2, H_3, H_4, L_1, L_2, L_3, x, y, z, u, v) = \\ & = \mathbf{M}^*(G_{111}, G_{112}, \dots, G_{l44}; x) H_4(x, v) H_1(u, u) H_2(u, u) H_3(u, u) \& \\ & \& \{H_1(x, y) H_2(x, u) H_3(x, u) H_4(y, z) \rightarrow H_1(v, u) H_2(v, u) H_3(v, z)\} \& \\ & \& \{H_1(x, y) \bar{H}_2(x, u) H_3(x, u) H_4(y, z) \rightarrow H_1(v, z) H_2(v, u)\} \& \\ & \& \{H_2(x, y) H_3(x, u) H_4(z, y) \rightarrow \bar{H}_2(x, u) H_3(v, x)\} \{H_1(z, y) \bar{H}_3(x, u) \rightarrow \\ & \rightarrow H_1(v, y)\} \{H_2(x, y) \bar{H}_3(x, u) H_4(y, z) \rightarrow H_2(v, z)\} \{H_3(x, y) H_4(z, y) \rightarrow \\ & \rightarrow \bar{H}_3(x, u) H_3(v, z)\} \prod_{\lambda=1}^l \prod_{\mu=1}^3 \prod_{\nu=1}^4 \{L_\mu(x, y) H_\nu(x, z) H_2(y, z) \rightarrow \\ & \rightarrow [G_{\lambda\mu\nu}(x) \sim G_{\lambda 12}(y)]\} \prod_{\lambda=1}^l \prod_{\nu=1}^4 \{H_1(v, v) H_\nu(x, z) H_2(y, z) \rightarrow \\ & \rightarrow [G_{\lambda 4\nu}(x) \sim G_{\lambda 12}(y)]\} \prod_{\lambda=1}^3 \{H_\mu(x, z) H_1(y, z) \rightarrow L_\mu(x, y)\} \end{aligned}$$

and

$$(29) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}' = & \mathbf{N}'(G_{111}, G_{112}, \dots, G_{l44}, H_1, H_2, H_3, H_4, L_1, L_2, L_3; x, y, z, u, v) = \\ & = \mathbf{N}(G_{111}, G_{112}, \dots, G_{l44}, H_1, H_2, H_3, H_4, L_1, L_2, L_3; x, y, z, u, v) \& \\ & \& \{H_1(y, y) \rightarrow \prod_{\mu=1}^3 (H_\mu(z, y) \sim H_\mu(z, u))\}. \end{aligned}$$

From what we have proved it follows

$$\mathbf{N}'(\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{l44}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3; x, y, z, 1, x+1)$$

for arbitrary $x, y, z \in J$; hence¹⁸

$$(Eu)(x)(Ev)(y)(z) \mathbf{N}'(\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{l44}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3; x, y, z, u, v)$$

¹⁷ We abbreviate conjunction of many terms by the sign Π as they were products.

¹⁸ The range of the quantifiers is the set J .

which implies

$(Eu)(x)(Ev)(y)(z) \mathbf{N}(\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{144}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3; x, y, z, u, v)$
on the one hand, and (by the identity $(Eu)(x)F(u, x) \rightarrow (x)(Eu)F(u, x)$)

$(x)(Eu)(Ev)(y)(z) \mathbf{N}'(\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{144}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3; x, y, z, u, v)$
on the other hand. Hence we see that the formulae

$\mathbf{B} = (Eu)(x)(Ev)(y)(z) \mathbf{N}(G_{111}, G_{112}, \dots, G_{144}, H_1, H_2, H_3, H_4, L_1, L_2, L_3; x, y, z, u, v)$
and

$\mathbf{C} = (x)(Eu)(Ev)(y)(z) \mathbf{N}'(G_{111}, G_{112}, \dots, G_{144}, H_1, H_2, H_3, H_4, L_1, L_2, L_2, x, y, z, u, v)$
can be satisfied if \mathbf{A} can. Obviously they are of the form (5) and (5'), respectively. To complete the proof of our theorem, we have still to show the converse: if \mathbf{B} or \mathbf{C} can be satisfied, the same holds for \mathbf{A} too.

5. First we prove that the satisfiability of \mathbf{C} implies the same property of \mathbf{B} . Suppose that \mathbf{C} is satisfied on a (non-empty) set J' by some predicates $\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{144}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ defined over J' . Then for suitable descriptive functions φ and ψ we have

$$(30) \quad \mathbf{N}'(\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{144}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3; x, y, z, \varphi(x), \psi(x))$$

for arbitrary $x, y, z \in J'$.

From the last conjunction term of \mathbf{N}' (see (29)) we conclude

$$(31) \quad X_1(y, y) \rightarrow \prod_{\mu=1}^3 (X_\mu(z, y) \sim X_\mu(z, \varphi(x)))$$

for arbitrary $x, y, z \in J$, while the conjunction term $H_1(u, u)H_2(u, u)H_3(u, u)$ of \mathbf{N} (see (28)) gives

$$(32) \quad X_1(\varphi(x), \varphi(x)) X_2(\varphi(x), \varphi(x)) X_3(\varphi(x), \varphi(x))$$

for arbitrary $x \in J'$. Let α be a fixed element of J' and let $\varphi = \varphi(\alpha)$. By (32), with $x = \alpha$, we obtain

$$(33) \quad X_1(\varphi, \varphi) X_2(\varphi, \varphi) X_3(\varphi, \varphi),$$

and hence, by (31) with $y = \varphi$ we get

$$X_\mu(z, \varphi) \sim X_\mu(z, \varphi(x))$$

for $\mu = 1, 2, 3$ and arbitrary $x, z \in J$. Therefore, in any true proposition we can replace $\varphi(x)$ by φ in the second argument of X_1, X_2 and X_3 .

In particular, we can infer from (30) and (33)

$$(34) \quad \mathbf{N}(\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{144}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3; x, y, z, \varphi, \psi(\alpha))$$

for arbitrary $x, y, z \in J'$; indeed, a glance at (28) shows that all occurrences of u in \mathbf{N} , except in $H_1(u, u)H_2(u, u)H_3(u, u)$, are those as second arguments of H_1, H_2 or H_3 . From (34) it follows

$(Eu)(x)(Ev)(y)(z) \mathbf{N}(\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{144}, X_1, X_2, X_3, X_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3; x, y, z, u, v)$,
the range of the quantifiers being J' ; hence \mathbf{B} can be satisfied.

6. Now we prove that the satisfiability of **B** implies that of **A**. Suppose that **B** can be satisfied; then (compare¹⁰) it is possible to define predicates $\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{144}, X_1, X_2, X_3, X_4, A_1, A_2, A_3$ over the set J of positive integers such that

$$N(\psi_{111}, \psi_{112}, \dots, \psi_{144}, X_1, X_2, X_3, X_4, A_1, A_2, A_3, x, y, z, 1, x+1)$$

holds for arbitrary positive integers x, y, z . Consequently, using again for $X_1(y, x+1)$ also the notation $A_4(x, y)$, we have (16)–(26) for any $x, y, z \in J$.

Next we prove

LEMMA 2. *We have*

$$(35) \quad X_\mu(n, \chi_\mu(n))$$

for $\mu = 1, 2, 3, 4$ and $n = 1, 2, \dots$

PROOF. For $\mu = 4$, (35) is the same as (17). For $\mu = 1, 2, 3$, we use induction. By (18) and (6), we have $X_1(1, \chi_1(1))$, $X_2(1, \chi_2(1))$ and $X_3(1, \chi_3(1))$. Suppose that $X_1(n, \chi_1(n))$, $X_2(n, \chi_2(n))$, $X_3(n, \chi_3(n))$ hold for some n . For $\chi_2(n) = \chi_3(n) = 1$, we have $X_2(n, 1)$ and $X_3(n, 1)$, hence, by (19) with $x = n$, $y = \chi_1(n)$, $z = \chi_1(n) + 1$ and (17) with $x = \chi_1(n)$, we infer $X_1(n+1, 1) \& X_2(n+1, 1) X_3(n+1, \chi_1(n)+1)$, i. e., on account of (7), (10) and (12), $X_1(n+1, \chi_1(n+1)) X_2(n+1, \chi_2(n+1)) X_3(n+1, \chi_3(n+1))$. For $\chi_2(n) \neq 1$, $\chi_3(n) = 1$, we have $X_3(n, 1)$, hence, by (21) with $x = n$, $y = \chi_2(n)$, $z = \chi_2(n) - 1$ and (17) with $x = \chi_2(n) - 1$, on the one hand $X_2(n, 1)$, on the other hand $X_3(n+1, \chi_2(n)-1)$, i. e. on account of (13), $X_3(n+1, \chi_3(n+1))$. Now $\bar{X}_2(n, 1)$ gives by (20) with $x = n$, $y = \chi_1(n)$, $z = \chi_1(n) + 1$ and (17) with $x = \chi_1(n)$, $X_1(n+1, \chi_1(n)+1) X_2(n+1, 1)$, i. e., owing to (8) and (10), $X_1(n+1, \chi_1(n+1)) \& X_2(n+1, \chi_2(n+1))$. Finally, for $\chi_3(n) \neq 1$, we obtain by (24), with $x = n$, $y = \chi_3(n)$, $z = \chi_3(n) - 1$ and (17), with $x = \chi_3(n) - 1$, on the one hand $\bar{X}_3(n, 1)$, on the other hand $X_3(n+1, \chi_3(n)-1)$, i. e. on account of (14), $X_3(n+1, \chi_3(n+1))$. Now, $\bar{X}_3(n, 1)$ gives by (22), with $x = n$, $y = \chi_1(n)$, $X_1(n+1, \chi_1(n))$, i. e. in virtue of (9), $X_1(n+1, \chi_1(n+1))$ and by (23) with $x = n$, $y = \chi_2(n)$, $z = \chi_2(n) + 1$ and (17), with $x = \chi_2(n)$, $X_2(n+1, \chi_2(n)+1)$, i. e. on account of (11), $X_2(n+1, \chi_2(n+1))$. Thus we infer $X_1(n+1, \chi_1(n+1)) \& X_2(n+1, \chi_2(n+1)) X_3(n+1, \chi_3(n+1))$ in all cases and lemma 2 holds.

Now let x_1, x_2, x_3 be arbitrary positive integers and let $x = \omega(x_1, x_2, x_3)$, $x_4 = x + 1$. Then we have $x_\mu = \chi_\mu(x)$ for $\mu = 1, 2, 3, 4$ by lemma 1 and by the definition of χ_4 ; hence, by lemma 2,

$$(36) \quad X_\mu(x, x_\mu) \quad \text{for } \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Let

$$p_{\mu\nu} = \omega(x_\mu, x_\nu, 1) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

From (36) with $\mu = 1$, and $\mu = 2$, replacing x by $p_{\mu\nu}$, i. e., x_1, x_2, x_3 by x_μ, x_ν , and 1 respectively, we infer

$$(37) \quad X_1(p_{\mu\nu}, x_\mu), \quad X_2(p_{\mu\nu}, x_\nu).$$

Again, from (26) with $y = p_{\mu\nu}$, $z = x_\mu$, (36) and (37) we get

$$(38) \quad \Lambda_\mu(x, p_{\mu\nu})$$

for $\nu = 1, 2, 3, 4$; $\mu = 1, 2, 3$, and remembering that $\Lambda_4(x, y)$ is an alternative notation for $X_1(y, x + 1)$, i. e. for $X_1(y, x_4)$, by (37) for $\mu = 4$ too. Finally from (25) with $y = p_{\mu\nu}$, $z = x_\nu$, (38), (36) with ν instead of μ and (37) we deduce $\Psi_{\lambda\mu\nu}(x) \sim \Psi_{\lambda 12}(p_{\mu\nu})$, for $\lambda = 1, \dots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; hence, defining the functions $\Phi_\lambda(x_\mu, x_\nu)$ equal to $\Psi_{\lambda 12}(p_{\mu\nu}) = \Psi_{\lambda 12}(\omega(x_\mu, x_\nu, 1))$, we have by (16) and by the definition of \mathbf{M}^* , $\mathbf{M}(\Phi_1, \dots, \Phi_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$. That is, we have

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4) \mathbf{M}(\Phi_1, \dots, \Phi_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$$

with J as the range of the quantifiers, in other words, the predicates Φ_1, \dots, Φ_l satisfy \mathbf{A} on J . Hence \mathbf{B} and \mathbf{C} are equivalent to \mathbf{A} and therefore our theorem holds.

(Received 15 December 1951)

ВКЛАДЫ В ТЕОРИЮ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ

Пятая статья

Прэфикс Аккермана с тремя общими кванторами

Я. ШУРАНИ (Будапешт)

(Резюме)

Теорема, которая доказывается в настоящей работе, является обострением известной теоремы Аккермана, это обострение схоже с данным во втором сообщении в связи с другими редукционными теоремами.

Теорема. Любая формула логического исчисления с точки зрения удовлетворяемости эквивалентна замкнутой формуле прэнекской формы типа

$$(I) \quad (Eu)(x)(Ev)(y)(z)N$$

и типа

$$(II) \quad (x)(Eu)(Ev)(y)(z)N',$$

где N и N' содержат функции лишь одного переменного, за исключением не более 7-ми функций двух переменных.

Доказательство, как и оригинальное доказательство Аккермана, исходит из того, что если какая-либо формула удовлетворяется, то удовлетворяется и на множестве натуральных чисел, как области индивидуумов. При этом переменные, связанные экзистенциальным квантором, могут быть заменены такими произвольными арифметическими функциями, которые зависят от переменных общих кванторов, опережающий экзистенциальный квантор, каждое целое значение принимает лишь один из них и лишь один раз и значение их везде больше, чем наибольший из переменных, встречающихся в аргументе. Используя результат второго сообщения можно предположить, что данная формула A , имеет вид $(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)M(F_1, \dots, F_l, x_1, x_2, x_3, x_4)$, где в M встречаются лишь функции F_1, \dots, F_l , каждая из которых есть функция двух переменных. (Функции одного переменного могут быть заменены функциями двух переменных типа $F(x, x)$.) По указанной теореме, если она удовлетворяется, то удовлетворяется и на множестве натуральных чисел, в качестве x_4 можно взять значение $\omega(x_1, x_2, x_3) + 1$, где $\omega(i, j, k)$ порядковый номер упорядоченной тройки (i, j, k) в исчислении $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 3), \dots$ Пусть $z_1(n), z_2(n), z_3(n)$ функции, однозначно определённые уравнением $\omega(z_1(n), z_2(n), z_3(n)) = n$ и $z_4(n) = n + 1$. Введя функции $\psi_{\lambda\mu\nu}(x) = F_{\lambda}(z_{\mu}(x), z_{\nu}(x))$, если $x = \omega(x_1, x_2, x_3)$, и, обозначив выражение, получаемое из M при замещение функции $F_{\lambda}(x_{\mu}, x_{\nu})$ функцией $\psi_{\lambda\mu\nu}(x)$ символом $M^*(\psi_{111}, \psi_{121}, \dots, \psi_{l44}, x)$, удовлетворяемость A означает то, что построенное из него значение M^* для любого значения x будет „правильным“.

Введём логические функции $X_{\mu}(x, y)$, соответствующие связи $y = z_{\mu}(x)$. Чтобы получить формулу, эквивалентную предыдущей, к M^* нужно приписать в качестве конъюнкционного члена формулу (17), выражающую роль $x + 1$, выражения (18) — (24), формулизирующие рекурсивные определения функций $z_{\mu}(x)$, ($\mu = 1, 2, 3$), и характеристику $\psi_{\lambda\mu\nu}$. Если при этом хотим избежать введения большого числа функций двух переменных и увеличения числа кванторов, то введём и функции $H_{\mu}(x, y)$, соответствующие связи $z_{\mu}(x) = z_1(y)$. Тогда формула (25) характеризует связь функций $\psi_{\lambda\mu\nu}$, (26) роль функций H_{μ} . Введя при помощи из конъюнкции переменные связанные экзистенциальным квантором, на место 1 и $x + 1$ получим выражение N . Если к этому, в качестве конъюнкционного члена припишем еще выражение (27), формализующее однозначность „1“ получим N' . Формулы (I) и (II), полученные при их помощи конечно удовлетворяются, если удовлетворяется A , но, наоборот, из удовлетворяемости (II), следует удовлетворяемость (I), а отсюда удовлетворяемость A .

Les Acta Mathematica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés en cahiers qui seront réunis en volumes de 300 à 350 pages. Il paraît, en général, un volume par an.

Les manuscrits, autant que possible écrits à la machine, doivent être envoyés à l'adresse suivante :

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'entreprise de commerce extérieur des livres et journaux „Kultúra“ (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Compte courant No. 45-790-057-50-032 ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in Russian, French, English and German.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes of 300 to 350 pages. On the average, one volume is published annually.

Manuscripts should, if possible, be typewritten and addressed to :

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors or publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „Kultúra“ Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Account No. 45-790-057-50-032) or with representatives abroad.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band von 20 Bogen. Im allgemeinen erscheint jährlich ein Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, möglichst mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu senden.

Abonnementspreis pro Band 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „Kultúra“ (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankkonto Nr. 45-790-057-50-032) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

<i>Kalmár, L.</i> , Contributions to the reduction theory of the decision problem, fourth paper Л. Кальмар, Вклады в теорию приведения проблемы разрешимости, четвертая статья	125
<i>Varga, O.</i> , Eine geometrische Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung О. Варга, Геометрическое характеризование пространств Финслера скалярной и постоянной кривизны	143
<i>Sz.-Nagy, Gy.</i> , Über Polynome, deren Nullstellen auf einem Kreis liegen Д. С.-Надь, О многочленах с корнями на окружности	157
<i>Jánossy, L.</i> , Study of a stochastic process arising in the theory of the electron multiplier Л. Яноши, Исследование стохастических процессов в теории электронного умножителя	165
<i>Jánossy, L.</i> , On the generalization of Laplace transform in probability theory Л. Яноши, Обобщение преобразования Лапласа в теории вероятностей	177
<i>Rédei, L.</i> , Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt Л. Рэди, О некоторых построениях колец при помощи косого произведения	185
<i>Hajós, G.</i> , Über die Feuerbachschen Kugeln mehrdimensionaler orthozentrischer Simplexe Г. Гаёш, О шарах Фейербаха многомерных ортоцентрических симплексов	191
Калужнин, Л. А., Об одном обобщении силовских p -подгрупп симметрических групп <i>L. Kaloujnine</i> , Über eine Verallgemeinerung der p -Sylowgruppen symmetrischer Gruppen	197
Марджанишвили, К. К., О некоторых аддитивных задачах теории чисел	223
<i>Georgiev, G.</i> , Résolution de l'équation $\sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0$ en nombres rationnels Г. Георгиев, О решении в рациональных числах неопределенного уравнения $\sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0$	229
<i>Péter, R.</i> , Probleme der Hilbertschen Theorie der höheren Stufen von rekursiven Funktionen Р. Пэтер, Проблемы теории Гильберта рекурсивных функций высших классов	247
<i>Takács, L.</i> , Occurrence and confidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration Л. Такач, Теоретико-вероятностное исследование явлений наступления и коинциденции в случае происшествий с любым распределением продолжительности	275
<i>Freud, G.</i> , Restglied eines Tauberschen Satzes, I Г. Фрайд, Об остаточном члене некоторой теоремы типа Таубера, I	299
<i>Szele, T. and J. Szendrei</i> , On abelian groups with commutative endomorphism ring Т. Селе и Я. Сендрей, О группах Абеля, кольцо эндоморфизма которых коммутативно	309
<i>Surányi, J.</i> , Contributions to the reduction theory of the decision problem, fifth paper Я. Шурани, Вклады в теорию приведения проблемы разрешимости, пятая статья	325